

Vektorová a tenzorová analýza

studijní text

Jaroslav Vlček

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB-TU Ostrava

14. září 2016

Obsah

1	Kartézské tenzory	5
1.1	Základní pojmy	5
1.1.1	Bodově-vektorový prostor	5
1.1.2	Změna báze v \mathbb{R}^n	6
1.1.3	Lineární zobrazení v \mathbb{R}^n	6
1.2	Ortogonální transformace	7
1.2.1	Ortonormální báze	7
1.2.2	Ortogonální matice a jejich vlastnosti	8
1.2.3	Lineární zobrazení při ortogonální transformaci	9
1.3	Kartézské tenzory	10
1.3.1	Zavedení	10
1.3.2	Operace s tenzory	11
1.3.3	Speciální tenzory	12
1.4	Tenzory v aplikacích	13
1.4.1	Operace s vektory v \mathbb{R}^3	13
1.4.2	Materiálová anizotropie	13
1.4.3	Tenzor napětí	14
1.4.4	Piezoelektrický jev	15
1.5	Tenzory 2. řádu	15
1.5.1	Parita tenzoru	15
1.5.2	Hlavní směry a invarianty tenzoru 2. řádu	16
1.5.3	Rozklad tenzoru 2. řádu	18
1.6	Levi-Civitův tenzor	18
1.6.1	Zavedení a základní vlastnosti	18
1.6.2	Cvičení	19
2	Základy tenzorové analýzy	21
2.1	Úvodní pojmy	21
2.1.1	Skalární funkce	21
2.1.2	Vektorové funkce jedné proměnné	23
2.1.3	Vektorové funkce	24
2.1.4	Tenzorové funkce	26
2.2	Derivace tenzorové funkce	26
2.2.1	Derivace a diferenciál tenzorové funkce	26
2.2.2	Diferenciální operátory	27
2.2.3	Složené operátory	27
2.2.4	Tenzor deformace	29
2.3	Křivkové a plošné integrály	31

2.3.1	Křivkové integrály	31
2.3.2	Plošné integrály	32
2.3.3	Integrační věty	34
2.4	Charakteristiky tenzorových polí	36
2.4.1	Globální charakteristiky	36
2.4.2	Lokální charakteristiky	38
2.4.3	Maxwellovy rovnice	40
2.4.4	Nezávislost na integrační cestě	41
3	Aplikace tenzorového aparátu	43
3.1	Tenzor setrvačnosti	43
3.2	Statická teorie elasticity	44
3.2.1	Motivace	44
3.2.2	Speciální případy tenzoru napětí	46
3.2.3	Rovnice kompatibility deformací	47
3.3	Zobecněný Hookeův zákon	48
3.3.1	Zobecněný Hookeův zákon	48
3.3.2	Elastické moduly	49
3.4	Rovnice mechaniky kontinua	50
3.4.1	Podmínky rovnováhy	50
3.4.2	Statické rovnice pružnosti	52
3.4.3	Dynamické rovnice	52
3.4.4	Okrajové podmínky v úlohách pružnosti	53
3.4.5	Proudění nestlačitelných tekutin	54
3.5	Krystalové soustavy	55
3.6	Umělá anizotropie v optice	57
3.6.1	Magnetooptický jev	57

Kapitola 1

Kartézské tenzory

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Bodově-vektorový prostor

Bodově-vektorový prostor obsahuje body $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ atd. a vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, respektive \mathbf{u}^\top apod., jedná-li se o sloupcové vektory. Bude-li hrát roli umístění vektoru, přiřadíme dvojici bodů X, Y vektor $\mathbf{u} = \overline{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$. Souřadnice bodů, resp. složky vektorů tvoří n -tice reálných (\mathbb{R}) nebo komplexních (\mathbb{C}) čísel. Proto budeme prostor označovat jednoduše \mathbb{R}^n , resp. \mathbb{C}^n . Číslo n představuje dimenzi prostoru, obvykle bude $n = 2$ nebo $n = 3$.

Operace v \mathbb{R}^n

1. sčítání vektorů: $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = u_i + v_i$,
2. násobení vektoru číslem: $(a \cdot \mathbf{u})_i = a \cdot u_i$, $a \in \mathbb{R}$.

Linearita \mathbb{R}^n

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Skalární součin vektorů

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Metrické vlastnosti

Velikost (norma) vektoru:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Směrové kosiny (= kosiny úhlů, které vektor svírá se souřadnými osami):

$$\cos \alpha_i = \frac{u_i}{\|\mathbf{u}\|},$$

Geometrická interpretace skalárního součinu (α ... odchylka vektorů):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha,$$

Ortogonalita: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$).

Vzhledem k uvedeným vlastnostem je \mathbb{R}^n metrický lineární prostor se skalárním součinem.

1.1.2 Změna báze v \mathbb{R}^n

Je-li dána původní báze $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n\}$, pak vektory nové báze $\{\mathbf{h}'_1, \mathbf{h}'_2, \dots, \mathbf{h}'_n\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů původní báze:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_1 &= a_{11}\mathbf{h}_1 + a_{12}\mathbf{h}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{h}_n, \\ \mathbf{h}'_2 &= a_{21}\mathbf{h}_1 + a_{22}\mathbf{h}_2 + \dots + a_{2n}\mathbf{h}_n, \\ &\dots \\ \mathbf{h}'_n &= a_{n1}\mathbf{h}_1 + a_{n2}\mathbf{h}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{h}_n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Koeficienty a_{ij} tvoří matici přechodu od původní k čárkované bázi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Této změně báze odpovídá změna souřadnic libovolného vektoru

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1\mathbf{h}_1 + u_2\mathbf{h}_2 + \dots + u_n\mathbf{h}_n, \quad (1.3)$$

na “čárkované”, takže vzhledem k (1.1) bude

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u'_1, u'_2, \dots, u'_n) = u'_1\mathbf{h}'_1 + u'_2\mathbf{h}'_2 + \dots + u'_n\mathbf{h}'_n = \\ &= u'_1(a_{11}\mathbf{h}_1 + a_{12}\mathbf{h}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{h}_n) + \dots + u'_n(a_{n1}\mathbf{h}_1 + a_{n2}\mathbf{h}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{h}_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Porovnáním (1.3) a (1.4) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + \dots + a_{n1}u'_n, \\ u_2 &= a_{12}u'_1 + a_{22}u'_2 + \dots + a_{n2}u'_n, \\ &\dots \\ u_n &= a_{1n}u'_1 + a_{2n}u'_2 + \dots + a_{nn}u'_n \end{aligned} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{u}^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{u}'^\top.$$

Souřadnice vektoru v nové bázi tedy získáme řešením úlohy

$$\mathbf{u}'^\top = \left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} \mathbf{u}^\top, \quad (1.5)$$

v níž hraje klíčovou roli matice přechodu mezi bázemi \mathbf{A} .

1.1.3 Lineární zobrazení v \mathbb{R}^n

Libovolná čtvercová matice \mathbf{T} dimenze n zprostředkovává lineární zobrazení v prostoru \mathbb{R}^n tak, že vzoru \mathbf{u} přiřazuje jeho obraz \mathbf{v} podle vztahu

$$\mathbf{v}^\top = \mathbf{T}\mathbf{u}^\top. \quad (1.6)$$

Linearita spočívá ve skutečnosti, že \mathbf{T} zobrazuje lineární kombinaci vektorů opět na jejich lineární kombinaci, a to s týmiž koeficienty, neboť

$$\mathbf{T}(k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_m\mathbf{u}_m) = k_1\mathbf{T}\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{T}\mathbf{u}_2 + \dots + k_m\mathbf{T}\mathbf{u}_m = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m.$$

Je-li navíc matice \mathbf{T} regulární, tj. $\det(\mathbf{T}) \neq 0$, existuje inverzní matice \mathbf{T}^{-1} , která zprostředkuje inverzní zobrazení

$$\mathbf{u}^\top = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}^\top.$$

Podívejme se nyní, jak se zobrazovací relace promění při změně báze, popsané vztahem (1.5). Nahradíme-li v něm všechny veličiny jejich obrazy, bude

$$\mathbf{v}'^\top = \mathbf{T}'\mathbf{u}'^\top \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{v}'^\top = \mathbf{T}'(\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{u}'^\top,$$

tj.

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{T}'\mathbf{u}'^\top = \mathbf{T}'(\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{u}'^\top.$$

Porovnáním obou stran získáme transformovanou matici zobrazení ve tvaru

$$\mathbf{T}' = (\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A}^\top. \quad (1.7)$$

1.2 Ortogonální transformace

1.2.1 Ortonormální báze

Báze $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ v \mathbb{R}^n se nazývá ortonormální, je-li současně ortogonální a jednotková, tj. platí-li

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.8)$$

Základní (standardní) bázi nazýváme ortonormální bázi, pro niž $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$, tj. i -tý vektor má všechny složky nulové s výjimkou i -té, která je rovna jedné. Geometricky se jedná o směrové vektory souřadných os kartézského souřadného systému v \mathbb{R}^n .

Odvodíme matici přechodu od báze (1.8) k jiné ortonormální bázi $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. Nejprve zapíšeme vyjádření i -tého vektoru nové báze vzhledem k bázi původní:

$$\mathbf{e}'_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_j = a_{ij}\mathbf{e}_j. \quad (1.9)$$

Poslední výraz představuje zápis pomocí tzv. **sumační konvence**, která spočívá v tom, že přes index, který se ve výrazu vyskytuje dvakrát, se automaticky sčítá (od 1 do n), aniž se píše výraz \sum . Použití konvence je zřejmé z následujících ukázek:

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad a_{ij} u_j = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \dots + a_{in} u_n, \quad \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii} \quad (\text{v } \mathbb{R}^3).$$

Vynásobíme-li skalárně vyjádření (1.9) vektoru nové báze vektorem \mathbf{e}_j báze původní, dostáváme

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij} \Rightarrow a_{ij} = \|\mathbf{e}'_i\| \cdot \|\mathbf{e}_j\| \cdot \cos(\widehat{x'_i x_j}) = \cos(\widehat{x'_i x_j}). \quad (1.10)$$

Tento výsledek znamená, že koeficient a_{ij} představuje kosinus úhlu, který svírá i -tá nová osa s j -tou původní osou, což nám umožní blíže určit význam koeficientů a_{ij} v matici přechodu \mathbf{A} .

Zpětná transformace z čárkované báze do nečárkované má tvar obdobný jako (1.9),

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji}\mathbf{e}'_i = b_{ji}\mathbf{e}'_i, \quad (1.11)$$

kde $b_{ji} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i = \cos(\widehat{x_j x'_i})$ jsou prvky matice \mathbf{B} , jejíž vlastnosti stanovíme. Protože $\cos(\widehat{x_j x'_i}) = \cos(\widehat{x'_i x_j})$, musí být $a_{ij} = b_{ji}$, tj. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$. Jelikož složenou transformací obdržíme opět původní bázi, musí platit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$, tudíž

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}, \quad (1.12)$$

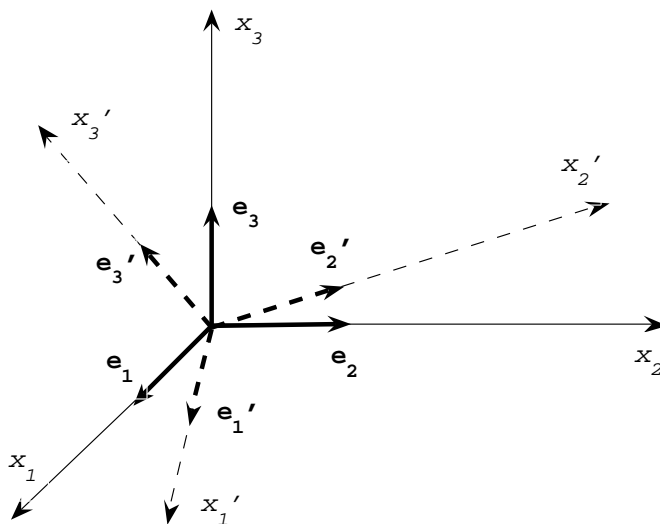
kde \mathbf{I} je jednotková matice. Matice s touto vlastností se nazývají ortonormální nebo (častěji a jednoduše) **ortogonální**.

1.2.2 Ortogonální matice a jejich vlastnosti

Je-li matice \mathbf{A} ortogonální, pak

- (1) $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$,
 protože $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ a současně $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$, musí být pro ortogonální matici $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^\top) = \det^2(\mathbf{A}) = 1$, odkud plyne tvrzení.
- (2) $\sum_i a_{ik} a_{jk} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$, $a_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk}$.
 Slovy: skalární součin dvou různých řádků (dvou různých sloupců) ortogonální matice je roven nule, norma každého řádku (sloupce) je rovna jedné (v zápise je ukázáno použití sumační konvence).
- (3) Součin matice \mathbf{A} s jinou ortogonální maticí je opět ortogonální matice.
 Je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, pak $\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{C}^\top$.

Interpretujeme-li ortogonální matici geometricky ve smyslu (1.10), násobení touto maticí představuje rotaci kartézského souřadného systému kolem počátku, jak ilustruje v \mathbb{R}^3 obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Kartézský souřadný systém původní (plnou čarou) a otočený (čárkovaně).

Cvičení

- (a) Snadno lze ukázat, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

je ortogonální a představuje otočení kolem počátku v \mathbb{R}^2 o úhel ϕ v kladném směru.

- (b) Rotaci v \mathbb{R}^3 kolem osy x_3 o úhel α odpovídá matice

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

podobně je rotace kolem osy x_1 o úhel γ popsána maticí

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Složením těchto rotací v uvedeném pořadí obdržíme opět rotaci s ortogonální maticí $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma$. Vypočtěte ji nejprve obecně a pak pro $\alpha = \gamma = \pi/2$.

(c) Dokažte, že matice \mathbf{A} je ortogonální:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Lineární zobrazení při ortogonální transformaci

Ortogonální transformace vektoru

Nejprve ukážeme, jak se mění souřadnice vektoru. Podle (1.5) je obecně $\mathbf{u}'^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{u}^\top$. Je-li \mathbf{A} ortogonální, pak $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$, a proto se vektor \mathbf{u} při přechodu mezi ortogonálními bázemi (tzn. při rotaci souřadného systému kolem počátku) transformuje na vektor

$$\mathbf{u}'^\top = \mathbf{A} \mathbf{u}^\top, \quad \text{tj.} \quad u'_i = a_{ij} u_j. \quad (1.13)$$

Důsledkem je důležité tvrzení, že **při ortogonální transformaci v prostoru libovolné dimenze se nemění (je tzv. invariantní) skalární součin vektorů**, jelikož

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' = u'_i v'_i = a_{ij} u_j a_{ik} v_k = a_{ij} a_{ik} u_j v_k = \delta_{jk} u_j v_k = u_j v_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.14)$$

Obraz matice lineárního zobrazení

Obdržíme ho na základě relace (1.7), v níž uplatníme definiční vlastnost ortogonální matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{T}' = (\mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{T} \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^\top. \quad (1.15)$$

V indexovém zápisu má tento výsledek tvar

$$T'_{ij} = a_{ik} T_{kl} a_{lj} \quad \text{neboli} \quad T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}. \quad (1.16)$$

Cvičení

- (d) Při rotaci s maticí dle příkladu (a) na straně 8 najděte obraz vektoru $\mathbf{u} = (2, \sqrt{3})$. Řešte nejprve obecně a pak pro úhel $\phi = \frac{\pi}{3}$.
- (e) Je dán vektor $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$. Proved'te jeho otočení pomocí matice \mathbf{R} z příkladu (b) pro uvedené úhly α, γ . Ukažte a graficky znázorněte skutečnost, že $\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \neq \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\alpha$.
- (f) Lineární zobrazení je určeno maticí

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odvoďte její obraz \mathbf{T}' při rotaci souřadného systému o úhel $\beta = \pi/2$ kolem osy x_2 .

1.3 Kartézské tenzory

Pouze některé geometrické a fyzikální veličiny jsou invariantní, tj. nemění se při změně souřadného systému (například všechny skaláry a některé další veličiny). Pro ostatní veličiny chceme stanovit způsob jejich popisu, který při zvoleném typu transformace (např. ortogonální) probíhá vždy stejně. Tato motivace vede k pojmu TENZOR. Připomínáme, že uvažujeme pouze ortogonální transformace v kartézských souřadných systémech. Ty jsou zprostředkovány ortogonálními maticemi splňujícími podmínku (1.12).

1.3.1 Zavedení

Připomeneme dvě důležité formule (1.13) a (1.16) z předchozího výkladu, které se týkají ortogonální transformace vektoru a matice. Zapišeme je v indexované podobě za použití sumační konvence:

$$u'_i = a_{ij}u_j, \quad T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}.$$

Uvažujme nyní zobrazení \mathbf{W} vektoru \mathbf{u} na matici \mathbf{T} ve tvaru

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}\mathbf{u}^\top, \quad \text{tj.} \quad T_{lm} = W_{lmn}u_n.$$

Vyšetříme, jak se zobrazení \mathbf{W} chová při ortogonální transformaci s maticí \mathbf{A} . Obraz $\mathbf{T}' = \mathbf{W}'\mathbf{u}'^\top$ v indexovém vyjádření postupně upravíme pomocí výše uvedených transformačních vztahů:

$$T'_{ij} = W'_{ijk}u'_k \rightarrow a_{il}a_{jm}T_{lm} = W'_{ijk}a_{kn}u_n \rightarrow a_{il}a_{jm}W_{lmn}u_n = W'_{ijk}a_{kn}u_n.$$

Úpravou poslední relace získáme konečný transformační předpis pro zobrazení \mathbf{W} :

$$W'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}W_{lmn}. \quad (1.17)$$

Jak je patrné, s rostoucím řádem (tj. počtem indexů) lineárních zobrazení roste odpovídajícím způsobem počet součinů s ortogonální maticí \mathbf{A} . Veličiny (objekty) s touto vlastností nazýváme **tenzory**. Tvar transformačních vztahů nezávisí na dimenzi prostoru, v němž zobrazení probíhá. Konkrétně pak docházíme k následujícím definicím.

Uspořádaná n -tice $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, která při ortogonální transformaci vyhovuje vztahu

$$u'_i = a_{ij}u_j \quad (1.18)$$

se nazývá tenzor prvního řádu neboli vektor. Matice $\mathbf{T} = (T_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ se nazývá kartézský tenzor druhého řádu, mění-li se její prvky při ortogonální transformaci podle vztahu

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (1.19)$$

Soubor veličin $\mathbf{T} = (T_{i_1 i_2 \dots i_M})$, $i_m = 1, \dots, n$ neboli M -rozměrná matice se nazývá kartézský tenzor M -tého řádu, mění-li se jeho prvky při ortogonální transformaci podle vztahu

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_M} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_M j_M} T_{j_1 j_2 \dots j_M}. \quad (1.20)$$

Poznámky

- skalár považujeme za tenzor multého řádu,
- počet složek tenzoru M -tého řádu v \mathbb{R}^n je roven n^M ,

- kartézským tenzorem 2. řádu je každá čtvercová matice, jejímiž prvky jsou čísla nebo funkce, tj.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix},$$

- typickými tenzorovými veličinami (2. řádu) jsou například napětí a deformace v mechanice, dyadický součin vektorů, materiálové vlastnosti anizotropních prostředí apod.

Příklad

Ověříme tenzorový charakter dyadického součinu vektorů $\mathbf{W} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. Jedná se o čtvercovou matici v \mathbb{R}^n s prvky $W_{kl} = u_k v_l$. Transformace podle (1.19) dává

$$W'_{ij} = u'_i v'_j = a_{ik} u_k a_{jl} v_l = a_{ik} a_{jl} u_k v_l = a_{ik} a_{jl} W_{kl},$$

což jsme měli dokázat.

1.3.2 Operace s tenzory

(A) Slučování tenzorů (sčítání, odčítání)

Slučujeme souměrné složky tenzorů téhož řádu, tj. například

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad P_{ijk} + Q_{ijk} = R_{ijk} \quad \text{apod.}$$

(B) Násobení tenzoru číslem (skalárem)

Násobíme každou složku tenzoru, tj. například

$$\mathbf{P} = k\mathbf{Q} \quad \Leftrightarrow \quad P_{ijk} = kQ_{ijk}.$$

(C) Úžení (kontrakce) tenzorů

Ze složek tenzoru vybereme ty, které mají dva indexy stejné, a algebraicky je sečteme; výsledkem je tenzor řádu o dva nižšího než tenzor původní. Jedná se tedy o princip sumační konvence. Příkladně bude

$$B_{ijkj} = B_{i1k1} + B_{i2k2} + B_{i3k3} = B_{ik}.$$

Úžením tenzoru 2. řádu vznikne skalár:

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{Tr}(\mathbf{T}) \quad (\text{“trace” – stopa matice}).$$

(D) Násobení tenzorů

Rozlišujeme tzv. vnější a vnitřní součin.

(D1) *Vnější součin*. Násobíme každou složku prvního tenzoru postupně každou složkou druhého tenzoru; výsledkem je tenzor, jehož řád je roven součtu řádů násobených tenzorů, např.

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad P_{ijk} \cdot Q_{lm} = R_{ijklm} \quad \text{apod.}$$

Příkladem je dyadický součin dvou vektorů v \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{W} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad W_{ij} = u_i v_j.$$

(D2) *Vnitřní součin*. Vznikne úžením vnějšího součinu, tj. aplikací sumační konvence. Jako příklad uvažujme vnější součin matice a vektoru, kterým je tenzor třetího řádu $T_{ij} u_k = W_{ijk}$;

vnitřním součinem bude standardní součin matice a vektoru, tj. vektor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^\top = \mathbf{v}^\top$ (tenzor 1. řádu) jako tenzor třetího řádu zúžený přes index j :

$$T_{ij}u_j = W_{ijj} = v_i.$$

V uvedeném smyslu je také nutno chápat a interpretovat definiční relace pro tenzory v kapitole 1.3.1.

Příklady

(a) Zúžením dyadického součinu vektorů obdržíme skalární součin, neboť

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = \text{Tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}).$$

(b) Kroneckerův symbol δ_{ij} je tenzorem 2. řádu, který reprezentuje jednotkovou matici \mathbf{I} . Proto je například

$$\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}, \quad \delta_{ii} = 3.$$

1.3.3 Speciální tenzory

(a) Izotropní tenzory

Jejich složky se při ortogonální transformaci nemění. Typickým příkladem je Kroneckerův tenzor (Kroneckerovo delta), neboť

$$\delta'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Stejnou vlastnost má také Levi-Civitův tenzor, o kterém pojednává kapitola 1.6.

Příklad

Dokážeme, že tenzor

$$\eta_{ijkl} = A \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} + B \cdot \delta_{ik}\delta_{jl} + C \cdot \delta_{il}\delta_{jk} \quad (1.21)$$

je pro libovolná čísla A, B, C izotropním tenzorem 4. řádu.

Podle transformační definice tenzoru je

$$\begin{aligned} \eta'_{ijkl} &= a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{lu}\eta_{rstu} = a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{lu} \cdot (A \cdot \delta_{rs}\delta_{tu} + B \cdot \delta_{rt}\delta_{su} + C \cdot \delta_{ru}\delta_{ts}) = \\ &= A \underbrace{a_{ir}\delta_{rs}}_{a_{is}} \underbrace{a_{js}a_{kt}}_{a_{jt}} \underbrace{a_{lu}\delta_{tu}}_{a_{lt}} + B \underbrace{a_{ir}\delta_{rt}}_{a_{it}} \underbrace{a_{js}\delta_{su}}_{a_{ju}} a_{kt}a_{lu} + C \underbrace{a_{ir}\delta_{ru}}_{a_{ir}} \underbrace{a_{js}\delta_{ts}}_{a_{jt}} a_{kt}a_{lu} = \\ &= A \cdot \underbrace{a_{is}a_{js}}_{\delta_{ij}} \underbrace{a_{kt}a_{lt}}_{\delta_{kl}} + B \cdot \underbrace{a_{it}a_{kt}}_{\delta_{ik}} \underbrace{a_{ju}a_{lu}}_{\delta_{jl}} + C \cdot \underbrace{a_{iu}a_{lu}}_{\delta_{il}} \underbrace{a_{kt}a_{jt}}_{\delta_{jk}} = \eta_{ijkl}. \end{aligned}$$

(b) Symetrické a antisymetrické tenzory

- Symetrický tenzor 2. řádu: $T_{ij} = T_{ji}$.
- Antisymetrický tenzor 2. řádu: $T_{ij} = -T_{ji}$.
- U tenzorů vyšších řádů se symetrie (antisymetrie) týká pouze vybrané dvojice indexů; například tenzor 3. řádu, pro který platí $W_{ijk} = -W_{ikj}$ je antisymetrický v indexech j, k .

U tenzorů 2. řádu je zřejmá analogie se symetrickými, resp. antisymetrickými maticemi. Platí, že každý takový tenzor lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru 2. řádu:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij},$$

kde S_{ij} je symetrický tenzor (určen šesti prvky) a A_{ij} antisymetrický tenzor (určen třemi prvky).

1.4 Tenzory v aplikacích

Nebude-li řečeno jinak, omezíme se vzhledem k obvyklým aplikacím v této i dalších kapitolách na tenzory v prostorech dimenze 2 a 3.

1.4.1 Operace s vektory v \mathbb{R}^3

Budeme pracovat se základní ortonormální bází

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Kromě dříve zavedeného dyadického a skalárního součinu připomeneme další operace definované pouze v tomto prostoru.

(i) Vektorový součin:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Geometrická interpretace:

- velikost $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$, kde α je úhel vektorů,
- směr je kolmý k oběma vektorům, $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \times \mathbf{v}$,
- orientace taková, že \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tvoří pravotočivou soustavu.

(ii) Smíšený součin tří vektorů:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

1.4.2 Materiálová anizotropie

Materiálová anizotropie se z hlediska původu rozlišuje podle toho, zda se jedná o stav přirozený nebo uměle vyvolaný. S přirozenou anizotropií se můžeme setkat u hornin a geologických struktur obecně, u kompozitních materiálů, krystalů atd. Jde zpravidla o jev trvalého charakteru. Umělá anizotropie je v materiálech vyvolána nějakým vnějším faktorem, například mechanickým namáháním, elektrickým nebo magnetickým polem aj., a obvykle odezní současně s externím činitelem. Typickým příkladem je piezoelektrický jev.

Příklady tenzorových materiálových veličin

- (i) permitivita $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$, kde \mathbf{D} je elektrická indukce a \mathbf{E} intenzita elektrického pole;
- (ii) koeficient difuze (difuzní tenzor) \mathbf{k}_d : $\mathbf{v}_d = -\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{grad} c$, kde \mathbf{v}_d je rychlost difuze a c je koncentrace;
- (iii) hydraulická propustnost (popř. koeficient filtrace) \mathbf{k}_f : $\mathbf{v}_f = -\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{grad} p$, kde \mathbf{v}_f je rychlost filtrace podzemní vody a p je hydraulický tlak.

Uvedené vztahy, ve kterých se s tenzorovými veličinami často setkáváme, patří do široké skupiny tzv. *konstitučních relací*. Mezi nimi představují specifickou kategorii relace používané u relačních modelů (příklady (ii) a (iii)), které schématicky můžeme zapsat takto:

toková veličina = materiálový parametr \times gradient stavové veličiny,

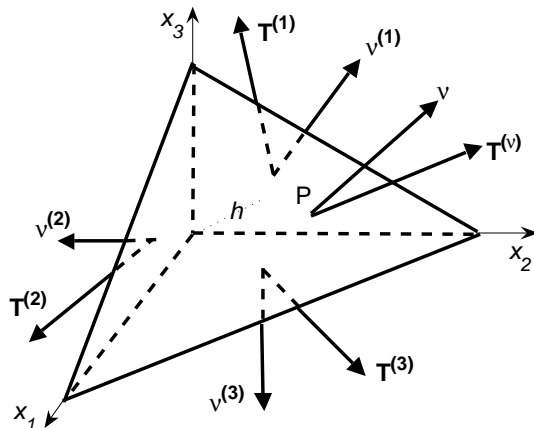
neboli

$$\mathbf{v} = -\mathbf{p} \cdot \text{grad } u . \quad (1.22)$$

Záporné znaménko na pravé straně je fyzikální konvence, která směřuje ke kladné (kladně orientované) tokové funkci \mathbf{v} při obvykle záporném gradientu stavové funkce u .

1.4.3 Tenzor napětí

Uvažujme objemový element ΔV tuhého pružného tělesa povrchovou silou \mathbf{T} působící na plošném elementu ΔS . Na jednotku plochy o normálovém vektoru $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ pak působí vektor napětí $\mathbf{T}^{(\nu)}$. Ten má obecnou polohu v prostoru, a proto ho rozložíme do tří plošek rovnoběžných se souřadnými rovinami, aby bylo možné vzájemné porovnání napěťových stavů v různých bodech s různými normálami. Jako elementární objem V zvolíme čtyřstěn – obr. 1.2. Velikost trojúhelníkové plošky kolmé na osu x_j , $j = 1, 2, 3$, označíme ΔS_j . Příslušný normálový vektor bude tedy opačný k bázovému vektoru příslušnému dané ose, tj. $\boldsymbol{\nu}^{(j)} = -\mathbf{e}_j$. Vektory napětí na těchto ploškách označíme $\mathbf{T}^{(j)}$. Neuvažujeme-li objemové síly (tíhovou, setrvačnou



Obrázek 1.2: Elementární čtyřstěn – k odvození tenzoru napětí.

apod.), musí být výslednice všech plošných sil nulová, aby byl čtyřstěn v rovnováze:

$$\mathbf{T}^{(1)} \Delta S_1 + \mathbf{T}^{(2)} \Delta S_2 + \mathbf{T}^{(3)} \Delta S_3 + \mathbf{T}^{(\nu)} \Delta S = \mathbf{o} . \quad (1.23)$$

Dále je zřejmé, že úhel normál $\boldsymbol{\nu}^{(j)} = -\mathbf{e}_j$ a $\boldsymbol{\nu}$ je roven úhlu, který svírají elementy ΔS_j a ΔS . Platí tedy, že

$$\Delta S_j = \cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}^{(j)}, \boldsymbol{\nu}}) \Delta S = -\nu_j \Delta S .$$

Upravíme-li takto bilanční vztah (1.23), dostáváme po vydělení výrazem ΔS rovnost

$$\mathbf{T}^{(\nu)} = \mathbf{T}^{(1)} \nu_1 + \mathbf{T}^{(2)} \nu_2 + \mathbf{T}^{(3)} \nu_3 . \quad (1.24)$$

Tento výsledek znamená, že vektor napětí v bodě plochy s normálou $\boldsymbol{\nu}$ můžeme jednoznačně určit, známe-li napětí ve třech navzájem kolmých směrech. Pro každý z nich to představuje tři složky vektoru $\mathbf{T}^{(j)}$, které označíme takto:

$$\mathbf{T}^{(j)} = (\tau_{j1}, \tau_{j2}, \tau_{j3}) .$$

Podle (1.24) tedy bude například pro první složku vektoru $\mathbf{T}^{(\nu)}$ platit

$$T_1^{(\nu)} = T_1^{(1)}\nu_1 + T_1^{(2)}\nu_2 + T_1^{(3)}\nu_3 = \tau_{11}\nu_1 + \tau_{21}\nu_2 + \tau_{31}\nu_3 .$$

Vztah (1.24) můžeme jako celek zapsat tenzorově rovnicí

$$T_i^{(\nu)} = \tau_{ji}\nu_j , \quad (1.25)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

je tenzor napětí (tenzorový charakter této veličiny ověřte jako cvičení). Diagonální složky τ_{jj} , $j = 1, 2, 3$ nazýváme normálová napětí, mimodiagonální složky τ_{ji} , $j \neq i$, jsou tzv. smyková napětí. Často používaný je vztah pro normálové napětí:

$$N = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} = T_j\nu_j = \tau_{jj} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \text{Tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (1.27)$$

(stopa matice $\boldsymbol{\tau}$, tj. součet prvků na hlavní diagonále). Jedná se o invariant tenzoru napětí (viz kap. 1.5), jehož interpretací je tah pro $N > 0$, resp. tlak pro $N < 0$.

1.4.4 Piezoelektrický jev

Schopnost konkrétního materiálu reagovat na vnější mechanické namáhání je charakterizována tzv. piezoelektrickým modulem \mathbf{d} , což je tenzor 3. řádu. Je-li $\boldsymbol{\tau}$ tenzor napětí, je piezoelektrický efekt vyjádřen dipólovým momentem \mathbf{P} takto:

$$P_i = d_{ijk}\tau_{jk} . \quad (1.28)$$

Ze sedmadvaceti složek tenzoru \mathbf{d} je například pro trojosý krystal pouze 18 různých v důsledku symetrie tenzoru napětí. Pro další krystalové soustavy s vyšší symetrií počet určujících složek dále klesá.

1.5 Tenzory 2. řádu

Jak je zřejmé z předchozího přehledu, jsou v obvyklých aplikacích zastoupeny převážně tenzory 2. řádu. Uvedeme pro ně některé doplňující vlastnosti, které často souvisí s poznatky z algebry matic.

1.5.1 Parita tenzoru

Pro libovolnou fyzikální veličinu $f(\mathbf{r})$, kde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ je polohový vektor, definujeme její paritu na základě toho, jak se změní její znaménko při změně orientace polohového vektoru. Je tedy

$$\mathcal{P}(f)f(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r}) \quad (1.29)$$

a tudíž $\mathcal{P}(f) = \pm 1$. Kupříkladu pro rychlost \mathbf{v} a sílu \mathbf{F} platí

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} , \quad \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} ,$$

a proto je $\mathbf{v}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$ a oba vektory mají zápornou paritu. Obecně pak pro libovolný řád M rozlišujeme dva typy tenzorů podle jejich parity \mathcal{P} :

- vlastní tenzory, pro něž $\mathcal{P} = (-1)^M$,
- pseudotenzory, pro něž $\mathcal{P} = -(-1)^M = (-1)^{M+1}$.

U vektorů ($M = 1$) je používáno označení polární vektor místo vlastní vektor a axiální vektor místo pseudovektor.

Platí obvyklé multiplikační pravidlo,

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{R} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbf{P})\mathcal{P}(\mathbf{Q}) = \mathcal{P}(\mathbf{R}) .$$

Proto je například vektorový součin axiálním vektorem, neboť $\mathcal{P}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathcal{P}(\mathbf{u})\mathcal{P}(\mathbf{v}) = 1$ pro $\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \mathcal{P}(\mathbf{v}) = -1$. Je nezbytné, aby paritu zachovávaly všechny tenzorové rovnice popisující reálné fyzikální jevy.

Příklad

Lorentzova síla \mathbf{F} působící na částici o rychlosti \mathbf{v} a nesoucí elektrický náboj q v magnetickém poli s magnetickou indukcí \mathbf{B} je dána vztahem

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

Protože \mathbf{F} a \mathbf{v} jsou polární vektory se zápornou paritou, musí mít \mathbf{B} paritu $+1$; jedná se tedy o axiální vektor.

1.5.2 Hlavní směry a invarianty tenzoru 2. řádu

Zaměříme se nyní na symetrické tenzory 2. řádu, které mají četné aplikace například v mechanice. Označme libovolný z nich

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} ,$$

takže $S_{ij} = S_{ji}$. Lze ho chápat jako matici kvadratické formy v proměnných x_1, x_2, x_3 tvořících (sloupcový) vektor \mathbf{x} . Formu lze zapsat způsobem obvyklým v algebře,

$$\mathbf{xSx}^\top = S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{12}x_1x_2 + 2S_{13}x_1x_3 + 2S_{23}x_2x_3 ,$$

nebo tenzorově (s využitím sumační konvence) jako $S_{ij}x_ix_j$. Tento tenzor 4. řádu je zúžen v obou indexech, jedná se tedy o skalár. Položíme-li ho roven nějaké konstantě (kladné nebo záporné), obdržíme rovnici kvadratické plochy v \mathbb{R}^3 . Nazýváme ji kvadrikou přidruženou k tenzoru S_{ij} :

$$S_{ij}x_ix_j = \pm K^2 .$$

Chceme-li určit, o jaký typ kvadriky se jedná, lze to provést na základě vlastních čísel (spektra) matice \mathbf{S} . Vlastním číslům odpovídají vlastní vektory, které určují směry hlavních os kvadriky. Připomeňme nyní, jak se formuluje a řeší úloha na vlastní čísla a vlastní vektory matice.

Každý hlavní směr \mathbf{u} je řešením rovnice

$$\mathbf{Su}^\top = \lambda\mathbf{u}^\top , \quad \text{tenzorově} \quad S_{ij}u_j = \lambda u_i ,$$

kde λ je v případě symetrického tenzoru reálné číslo. Po přepsání do tvaru

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}^\top = \mathbf{o}^\top , \quad \text{tenzorově} \quad (S_{ij} - \lambda\delta_{ij})u_j = 0 ,$$

vidíme, že pro získání netriviálního řešení $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ musí být determinant matice soustavy rovnice:

$$|S_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozepsání obdržíme rovnici třetího stupně

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (1.30)$$

jejímž řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Jejich struktura charakterizuje typ kvadratické plochy, například

- navzájem různé $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ odpovídají trojosé (nerotační) eliptické ploše,
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ znamená kulovou plochu,
- $\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ určuje hyperbolickou plochu s osou rotace x_3 atd.

Násobnost kořenů je tedy známkou symetrie kvadriky. Důležitou vlastností spektra vlastních čísel matice je to, že se nemění při ortogonální transformaci, tj. jsou nezávislé na volbě souřadného systému. Proto je pro konkrétní tenzor invariantní charakteristická rovnice (1.30) a tedy i její koeficienty. Nazýváme je invarianty tenzoru 2. řádu a mají, jak je známo z algebry, tento tvar:

$$I_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{ii}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = |\mathbf{S}| \quad (\text{determinant matice } \mathbf{S}).$$

Příklad

Určíme hlavní směry a typ přidružené kvadriky tenzoru

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. vlastní čísla:

Charakteristická rovnice

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Přidruženou kvadrikou je nerotační eliptická plocha v obecné poloze o rovnici

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = K^2.$$

2. vlastní vektory (hlavní směry kvadriky = směry hlavních os eliptické plochy):

Vlastní čísla postupně dosazujeme do matice $\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}$ a řešíme homogenní algebraickou soustavu pro složky jednotlivých vlastních vektorů.

$$\lambda_1 = 3 \dots \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matice má hodnotu dvě, řešením soustavy je libovolný násobek vektoru $\mathbf{u}_1 = (2, 2, -1)$. Analogicky získáme zbývající dva vlastní vektory:

$$\lambda_2 = 6 \dots \mathbf{u}_2 = (-1, 2, 2), \quad \lambda_3 = 9 \dots \mathbf{u}_3 = (2, -1, 2).$$

1.5.3 Rozklad tenzoru 2. řádu

Každý tenzor 2. řádu lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru podle vztahu

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}$$

zmíněného v části 1.3.3. V inženýrských aplikacích se lze také setkat se specifickou variantou v následující podobě:

$$T_{ij} = \frac{1}{3}T_{ii}\delta_{ij} + S_{ij} + A_{ij} - \frac{1}{3}T_{ii}\delta_{ij} = K_{ij} + D_{ij}. \quad (1.31)$$

Izotropní tenzor K_{ij} se nazývá kulový tenzor, neboť jeho přidruženou kvadrikou je kulová plocha. Tenzor D_{ij} nese název deviátor, jelikož jistým způsobem vyjadřuje odchylku původního tenzoru \mathbf{T} od izotropního.

Rozložíme-li dyadický součin vektorů $T_{ij} = u_i v_j$ na symetrický a antisymetrický tenzor, lze snadno ukázat, že

$$A_{ij} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_{6-i-j}, \quad (1.32)$$

odpovídá-li pořadí indexů i, j sudé permutaci pořadí 123. Všimněme si důležité skutečnosti, že vektorový součin je definován pouze v prostoru dimenze 3. Důvod je následující: počet prvků určujících antisymetrický tenzor 2. řádu v \mathbb{R}^n je $(n^2 - n)/2$. Má-li být roven počtu složek vektoru v tomto prostoru, musí být $(n^2 - n)/2 = n$, což nastává pouze pro $n = 3$.

1.6 Levi-Civitův tenzor

1.6.1 Zavedení a základní vlastnosti

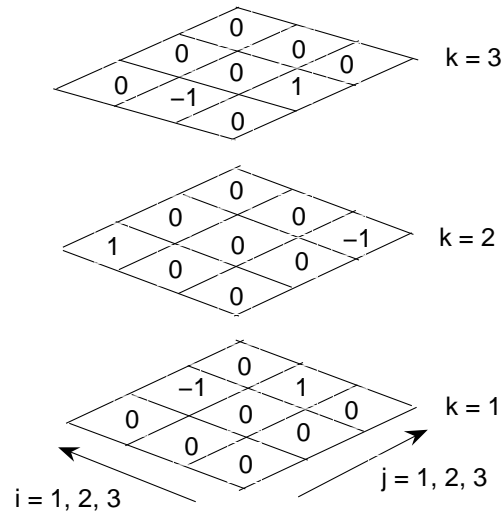
Levi-Civitův tenzor je tenzor třetího řádu definovaný vztahem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pro sudou permutaci indexů,} \\ -1 & \text{pro lichou permutaci indexů,} \\ 0 & \text{pro } i = j \text{ nebo } j = k \text{ nebo } k = i. \end{cases} \quad (1.33)$$

Tento tenzor má celkem $3^3 = 27$ prvků, z nichž ovšem jen 6 je nenulových (viz obr. 1.3). Ukážeme jeho transformační vlastnost podle (1.20):

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ijk} &= a_{i1}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn} = a_{i1} \cdot (a_{j2}a_{k3} - a_{j3}a_{k2}) + a_{i2} \cdot (a_{j3}a_{k1} - a_{j1}a_{k3}) + a_{i3} \cdot (a_{j1}a_{k2} - a_{j2}a_{k1}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312, \\ -1, & ijk = 321, 213, 132, \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases} = \epsilon_{ijk}. \end{aligned}$$

Budou-li totiž všechny tři indexy různé, dostáváme determinant ortogonální matice \mathbf{A} , který je roven ± 1 v závislosti na pořadí řádků. Jsou-li si některé dva indexy rovny, budou se rovnat odpovídající řádky matice a její determinant bude nulový. Protože je $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, je Levi-Civitův tenzor při ortogonální transformaci invariantní a tedy **izotropní**. Dále je podle definice **antisymetrický** vzhledem k libovolné dvojici indexů, protože $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ atd.



Obrázek 1.3: Levi-Civitův tenzor.

Příklad

Dokážeme, že pro vektorový součin platí

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i u_j v_k . \quad (1.34)$$

Využijeme definici Levi-Civitova tenzoru:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i u_j v_k &= \mathbf{e}_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \mathbf{e}_2(-u_1 v_3 + u_3 v_1) + \mathbf{e}_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} . \end{aligned}$$

1.6.2 Cvičení

- (1) Vyjádřete pomocí Levi-Civitova tenzoru smíšený součin vektorů.
- (2) Určete hlavní směry a typ přidružené kvadriky tenzoru

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

- (3) Dokažte platnost identity $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{jm} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{im}$.
- (4) S použitím předchozího vztahu ověřte platnost vzorce pro dvojný vektorový součin:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} . \quad (1.35)$$

- (5) Ukažte, že Levi-Civitův tenzor přiřazuje vektoru antisymetrický tenzor 2. řádu, tj.

$$\epsilon_{ijk} u_k = U_{ij} , \quad U_{ij} = -U_{ji} . \quad (1.36)$$

- (5) Tenzor napětí je zadán ve tvaru

$$\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Určete hlavní směry a hlavní napětí. Stanovte typ přidružené kvadriky napětí a napište její rovnici, prochází-li bodem $[\sqrt{2}, -1, 1]$.

- (6) Bod $Q = [1, -1, 4]$ leží na ploše $z = 2 - x^2 - 3xy$. Tenzor napětí v tomto bodě je zadán ve tvaru

$$\tau = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Určete hlavní směry a hlavní napětí, stanovte typ přidružené kvadriky napětí a napište její rovnici, prochází-li bodem zadaným bodem. Vypočtěte vektor napětí v tomto bodě.

- (7) Rozložte dyadický součin vektorů $T_{ij} = u_i v_j$ na kulový tenzor a deviátor pro konkrétní vektory $\mathbf{u} = (2, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$.

Kapitola 2

Základy tenzorové analýzy

Základní témata vektorové analýzy jsou doplněna o aplikace tenzorového počtu. Problematika je diskutována převážně v prostoru dimenze 3, kde je možno ukázat geometrickou interpretaci a demonstrovat důležité poznatky na aplikacích.

2.1 Úvodní pojmy

2.1.1 Skalární funkce

Základní označení

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3 \dots$ oblast,

$\partial\Omega = \Gamma \dots$ její hranice,

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \dots$ uzavřená oblast (uzávěr oblasti Ω),

$X = [x_1, x_2, x_3] \in \Omega \dots$ bod oblasti,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \dots$ jeho polohový vektor.

Zobrazení $f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ představuje **skalární funkci** definovanou na oblasti Ω předpisem $f(x_1, x_2)$ v rovině, resp. $f(x_1, x_2, x_3)$ v prostoru.

V prvním případě je jejím grafem plocha v \mathbb{R}^3 , ve druhém přímá grafická interpretace není k dispozici. Lze však zavést tzv. *ekviskalární hladiny*

$$f(x_1, x_2, x_3) = C$$

jako plochy, na nichž funkce dosahuje stejných hodnot (pro funkci dvou proměnných jsou ekviskalárními hladinami křivky na ploše). Podle typu pole nesou hladiny svůj název, například izotermy, izobary, ekvipotenciály, vrstevnice apod.

Důležité třídy funkcí:

$C^k(\Omega) \dots$ prostory funkcí se spojitými derivacemi na oblasti Ω až do řádu k včetně,

$L_p(\Omega) \dots$ prostory funkcí absolutně integrovatelných v p -té mocnině na Ω , tj. funkcí, pro něž konverguje integrál

$$\int_{\Omega} |f(X)|^p d\Omega.$$

Je-li plocha S grafem funkce $f(x_1, x_2) \in C^1(\bar{\Omega})$, tj. se spojitými parciálními derivacemi (alespoň) prvního řádu, existuje v každém jejím bodě **normálový vektor**

$$\mathbf{n}(X) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right). \quad (2.1)$$

Orientované přírůstky funkce f ve směru jednotlivých os lze aproximovat tečnými vektory

$$\boldsymbol{\tau}_1 dx_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2 dx_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 .$$

Jejich vektorový součin tvoří orientovaný element plochy (přesněji její tečné roviny):

$$d\mathbf{S} = \boldsymbol{\tau}_1 dx_1 \times \boldsymbol{\tau}_2 dx_2 = \mathbf{n}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{n}(x_1, x_2) = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)$$

je výše uvedený normálový vektor. Velikost elementu je pak

$$dS = \|\mathbf{n}\| dx_1 dx_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1} dx_1 dx_2 . \quad (2.3)$$

Plocha s uvedenými vlastnostmi se nazývá *hladká*.

Příklady

1. Skalární funkce dvou proměnných $f(X) = 3x_1 \sqrt[3]{x_2^4}$ je třídy $C^1(\Omega)$ na libovolné oblasti Ω neobsahující bod(-y) osy x_1 , neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\sqrt[3]{x_2^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1 \sqrt[3]{x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 4\sqrt[3]{x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{4x_1}{3\sqrt[3]{x_2}},$$

kde poslední z parciálních derivací 2. řádu není pro $x_2 = 0$ spojitá.

2. Uvažujme na jednotkovém kruhu $\bar{\Omega} = \{\|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ funkci

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} .$$

Integrací s použitím transformace do polárních souřadnic dostáváme

$$\int_{\Omega} |f(X)| d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho = 2\pi, \quad \int_{\Omega} |f(X)|^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho = \infty .$$

Proto platí: $g(X) \in L_1(\Omega)$, ale $g(X) \notin L_2(\Omega)$.

3. Elektrostatický potenciál bodového náboje Q umístěného v počátku souřadného systému je pro bod $X \in \mathbb{R}^3$ dán vztahem

$$V(X) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} ,$$

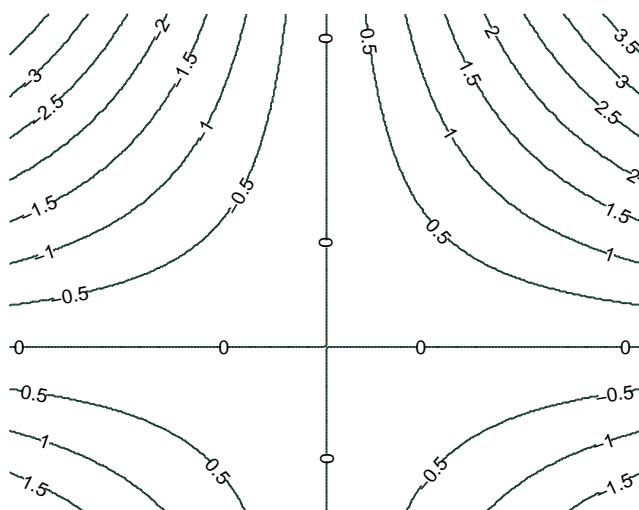
kde ε je permitivita prostředí. Ekvipotenciální hladiny $V(X) = C$ jsou soustředné kulové plochy o rovnicích

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon C}, \quad \text{tj.} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon C}\right)^2 .$$

4. Tlakové pole je na oblasti $\Omega = (-1, 3) \times (-1, 2)$ popsáno funkcí $p(X) = x_1 x_2 - x_1$. Grafem je sedlová plocha, izobarami jsou rovnoosé hyperboly o rovnicích

$$p(X) = C \quad \text{neboli} \quad x_2 = 1 + \frac{C}{x_1} .$$

Průmět některých izobar do roviny $p = 0$ je na obr. 2.1.

Obrázek 2.1: Izobary funkce $p = x_1x_2 - x_1$.

2.1.2 Vektorové funkce jedné proměnné

Tyto funkce představují důležitou skupinu definovanou předpisem

$$\varphi: \langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)). \quad (2.4)$$

Koncové body vektorů $\varphi(t)$ tvoří jistou *křivku* K v prostoru definovanou na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Je-li $\|\varphi(t)\| \neq 0$ a současně $x_i(t) \in C^1(\langle t_1, t_2 \rangle)$, nazývá se K *hladkou křivkou*. Je zřejmé, že k ní pro každé t existuje tečna odpovídající tečnému vektoru

$$\dot{\varphi}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$$

(tečkou na příslušném symbolem značíme derivaci podle parametru t). Po částech *hladká* křivka je sjednocením konečného počtu hladkých křivek majících společně pouze krajní body. Relací (2.4) je dána konkrétní parametrizace křivky K . Každá křivka má nekonečně mnoho parametrizací. Dále budeme předpokládat, že $\varphi(t)$ je prosté zobrazení, tj. jedná se o *regulární* křivku (v žádném bodě sama sebe neprotíná).

Orientace křivky se stanovuje zadáním počátečního a koncového bodu, není-li uzavřená. Křivka je uzavřená, jestliže $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Orientace rovinné uzavřené křivky proti směru hodinových ručiček je definována jako kladná. V prostoru je třeba kladnou orientaci křivky zadat vzhledem k zvolenému směru podle pravidla pravé ruky.

Příklady

1. Mějme v rovině parabolu $x_2 = 2x_1 - x_1^2$ orientovanou od bodu $[0,0]$ k bodu $[2,0]$. Její bezprostřední parametrizaci obdržíme, položíme-li $x_1 = t$:

$$\varphi(t) = (t, 2t - t^2), \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Jiná z možných parametrizací vznikne, položíme-li $x_1 = 1 + \cos s$:

$$\psi(s) = (1 + \cos s, \sin^2 s), \quad s \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Snadno se lze přesvědčit, že první z parametrizací je souhlasná se zadanou orientací křivky, zatímco ve druhém případě se s rostoucím parametrem s pohybujeme po křivce opačným směrem (nesouhlasná parametrizace).

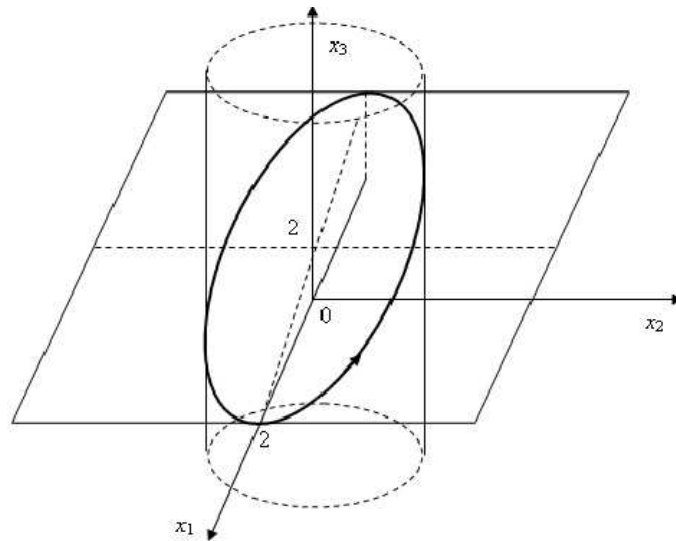
2. Je dána křivka $K = \{x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1 + x_3 = 2\}$ orientovaná souhlasně s kladným směrem osy x_3 . Úkolem je najít vhodnou parametrizaci souhlasnou s orientací.

Jedná se o eliptický řez rovinou na rotační válcové ploše – obr. 2.2. Nejprve využijeme zřejmou parametrizaci řídící kružnice válcové plochy o poloměru 2:

$$x_1 = 2 \cos t, \quad x_2 = 2 \sin t .$$

Z rovnice roviny snadno dovodíme zbývající vztah $x_3 = 2 - x_1 = 2 - 2 \cos t$ a zapíšeme výslednou parametrizaci elipsy:

$$\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 - 2 \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obrázek 2.2: K parametrizaci elipsy v prostoru.

Abychom se přesvědčili, že získaná parametrizace je souhlasná se zadanou orientací (viz šipku na obr. 2.2), dosadíme do funkce $\varphi(t)$ postupně tři rostoucí hodnoty parametru t , například $0, \pi/2$ a π . Vidíme, že jim odpovídající body $[2,0,0]$, $[0,2,2]$ a $[-2,0,4]$ na křivce za sebou následují ve směru zvolené orientace.

2.1.3 Vektorové funkce

Zobrazení $\mathbf{F}(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ představuje vektorovou funkci $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ o složkách $F_i(x_1, x_2, x_3)$. Za vhodných předpokladů reprezentují **vektorové pole** \mathbf{F} tzv. *vektorové linie* definované tak, že v libovolném bodě X definičního oboru má vektor $\mathbf{F}(X)$ směr tečny k těmto liniím. To znamená, že je kolineární (rovnoběžný) s vektorem $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, platí tedy

$$\mathbf{F} \times d\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad (F_2 dx_3 - F_3 dx_2, F_3 dx_1 - F_1 dx_3, F_1 dx_2 - F_2 dx_1) = (0, 0, 0) . \quad (2.5)$$

Tento výsledek obvykle zapisujeme jako soustavu tří diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \frac{dx_3}{F_3} , \quad (2.6)$$

z nichž stačí vyřešit kteroukoli vybranou dvojici. Výsledkem jsou dva systémy ploch v prostoru,

$$\Phi((x_1, x_2, x_3) = C_1, \quad \Psi((x_1, x_2, x_3) = C_2 ,$$

které se protínají právě v hledaných křivkách. Případná parametrizace je finálním krokem.

Vektorové linie často nesou názvy související s typem vektorového pole které reprezentují. Mluvíme pak o trajektoriích či proudnicích u pole rychlostí, o siločarách či magnetických indukčních čarách.

Příklady

1. Je dáno rovinné silové pole $\mathbf{F} = (x_1 \cos x_2, \sin x_2)$. Odvod'te rovnice jeho siločar.

Jedná se o jednodušší variantu předchozího výsledku – vystačíme s jedinou diferenciální rovnicí

$$\frac{dx_1}{x_1 \cos x_2} = \frac{dx_2}{\sin x_2},$$

kterou lze snadno separovat a dojít k obecnému řešení

$$x_2 = \arcsin(Cx_1).$$

2. Rychlostní pole v prostoru je popsáno funkcí

$$\mathbf{v} = (x_1x_2x_3, -x_1^2x_3, x_1^2x_2), \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Úkolem je určit vektorovou linii (trajektorii) jdoucí bodem $M = [1, 0, 1]$.

Výchozí soustava rovnic (2.6):

$$\frac{dx_1}{x_1x_2x_3} = -\frac{dx_2}{x_1^2x_3} = \frac{dx_3}{x_1^2x_2}.$$

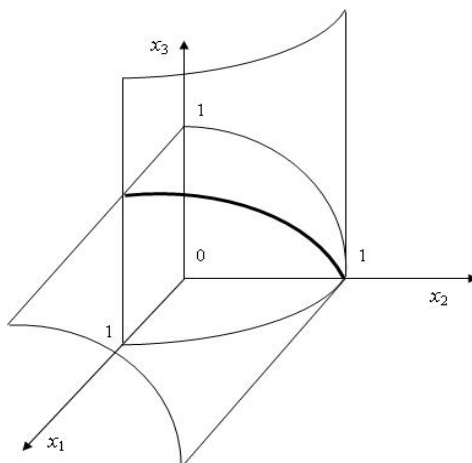
První dvojice dává výsledek

$$x_1 dx_1 = -x_2 dx_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = C_1,$$

druhá

$$-x_2 dx_2 = x_3 dx_3 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 + x_3^2 = C_2.$$

Jedná se o dva navzájem kolmé systémy koaxiálních válcových ploch. Dosazením souřadnic bodu M obdržíme $C_1 = C_2 = 1$, tedy průnik dvou kolmých rotačních válcových ploch o stejném poloměru.



Obrázek 2.3: K příkladu 2.

Hledanou křivkou je elipsa (resp. její čtvrtina v prvním oktantu) na obr. 2.3 s parametrizací

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, \cos t), \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

2.1.4 Tenzorové funkce

Obecná tenzorová funkce $\mathbf{T}(X)$ přiřazuje každému bodu $X \in \Omega$ tenzor M -tého řádu s prvky $T_{i_1 i_2 \dots i_M}(X)$. Tenzorová funkce libovolného řádu s konkrétní interpretací (teplota, rychlost, deformace, permitivita apod.) se nazývá *tenzorové pole*.

Speciálně tenzorová funkce 2. řádu je zobrazení $\mathbf{T}(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, $T_{ij} = T_{ij}(x_1, \dots, x_n)$. Pro $n = 3$ má podobu trojřáde matice, jejíž každý prvek je funkcí prostorových souřadnic:

$$\mathbf{T}(X) = \begin{pmatrix} T_{11}(X) & T_{12}(X) & T_{13}(X) \\ T_{21}(X) & T_{22}(X) & T_{23}(X) \\ T_{31}(X) & T_{32}(X) & T_{33}(X) \end{pmatrix}.$$

2.2 Derivace tenzorové funkce

2.2.1 Derivace a diferenciál tenzorové funkce

Je-li každá složka tenzorové funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ diferencovatelná na oblasti Ω , pak tenzor $\partial\mathbf{T}/\partial\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ se složkami

$$\frac{\partial T_{i_1 i_2 \dots i_M}}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{T_{i_1 i_2 \dots i_M}(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - T_{i_1 i_2 \dots i_M}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_j}$$

nazýváme *totální derivací funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ vzhledem k \mathbf{x}* .

Diferenciál tenzorové funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x} \in \Omega$ je definován jako lineární funkce vektoru přírůstků $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ vztahem

$$d\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Totální derivace je tenzor řádu $M + 1$, diferenciál je řádu M stejně jako \mathbf{T} . Konkrétně například totální derivací tenzoru 2. řádu v \mathbb{R}^3 obdržíme tenzor 3. řádu s dvaceti sedmi složkami:

$$\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{W}, \quad \text{kde } W_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}.$$

Diferenciál vektorové funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_1, T_2, T_3)$ získáme jako součin matice

$$\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1} & \frac{\partial T_3}{\partial x_2} & \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

a vektoru $(dx_1, dx_2, dx_3)^\top$:

$$d\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} dx_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dT_1 \\ dT_2 \\ dT_3 \end{bmatrix}.$$

V řádcích jsou skalární diferenciály jednotlivých složek vektorové funkce.

2.2.2 Diferenciální operátory

Diferenciální počet s tenzorovými funkcemi se v aplikacích uplatňuje zpravidla prostřednictvím diferenciálních operátorů aplikovaných na skalární funkce a tenzory prvního a druhého řádu. Tyto operace bývají velmi často zapisovány pomocí diferenciálního operátoru 1. řádu

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

nazývaného **Hamiltonův operátor (nabla)**.

Je-li $T(\mathbf{x})$ skalár, pak jeho totální derivací je vektorová funkce zvaná **gradient**

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_n} \right) = \mathbf{grad} T = \nabla T. \quad (2.8)$$

K zavedení dalších operátorů můžeme využít rozklad totální derivace vektorové funkce (2.7) podle schématu (1.31):

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \frac{\partial T_i}{\partial x_i} + A_{ij} + P_{ij}, \quad P_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

První (izotropní) člen je zúžený tenzor 2. řádu, tedy skalár, v němž

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial T_n}{\partial x_n} = \operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (2.10)$$

Jedná se o operátor zvaný **divergence** vektorové funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

Uplatníme-li na antisymetrickou část A_{ij} vlastnost (1.32), kde $u_i = \partial/\partial x_i$ a $v_j = T_j$, dostáváme vektor

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T} = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1}, \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \quad (2.11)$$

Výsledkem je **rotace** vektorové funkce $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_1, T_2, T_3)$, pro kterou s využitím definice vektorového součinu můžeme použít i vyjádření

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix}.$$

Pro úplnost je na místě uvést že pro totální derivaci vektorové funkce lze také použít zápis pomocí nabla-operátoru:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T} \otimes \nabla.$$

2.2.3 Složené operátory

Formálně lze v \mathbb{R}^3 ze tří operátorů prvního řádu složit 9 operátorů druhého řádu:

<i>grad grad</i>	div grad	rot grad
grad div	<i>div div</i>	<i>rot div</i>
<i>grad rot</i>	div rot	rot rot

Operátory vytištěné kurzívou nelze realizovat, protože gradient lze aplikovat pouze na skalární funkci, zatímco divergenci a rotaci výhradně na vektor. Pro složené operátory vytištěné tučně platí:

- $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$ (**Laplaceův operátor**),

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2};$$

- $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{T} - \Delta \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{T} = (\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3)$
(důkaz jako úloha k procvičení).

Zbývající operátory dávají při aplikaci nulový výsledek:

- $\operatorname{rot} \operatorname{grad} T = \nabla \times \nabla T = \mathbf{o}$ podle definice vektorového součinu; v tenzorovém vyjádření obdržíme pro i -tou složku:

$$(\operatorname{rot} \operatorname{grad} T)_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} = \mathbf{o},$$

protože pro každé pevně zvolené i získáme dvě smíšené derivace 2. řádu lišící se pouze znaménkem.

Důsledek: *je-li $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{o}$ na oblasti Ω , pak je funkce \mathbf{F} na této oblasti gradientem nějaké skalární funkce T : $\mathbf{F} = \operatorname{grad} T$.*

- $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{T} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) = 0$,
neboť v tomto smíšeném součinu jsou dva vektory stejné. V tenzorovém zápisu dostáváme

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial T_k}{\partial x_j} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 T_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

(pro každé k jde o dvě smíšené parciální derivace opačného znaménka).

Důsledek: *je-li $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ na oblasti Ω , pak je možno funkci \mathbf{F} na této oblasti reprezentovat rotací jisté vektorové funkce \mathbf{T} : $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{T}$.*

Příklady

- (a) Vypočteme divergenci součinu skalární funkce φ s vektorovou funkcí \mathbf{T} :

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{T}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} T_i + \varphi \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{T} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{T}.$$

- (b) Označíme-li $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ polohový vektor bodu x , je $r = \|\mathbf{r}\|$. Vypočteme $\operatorname{grad} (1/r)$.
Protože

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = -\frac{x_i}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} = -\frac{x_i}{r^3},$$

dostáváme

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\left(\frac{x_1}{r^3}, \frac{x_2}{r^3}, \frac{x_3}{r^3} \right) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

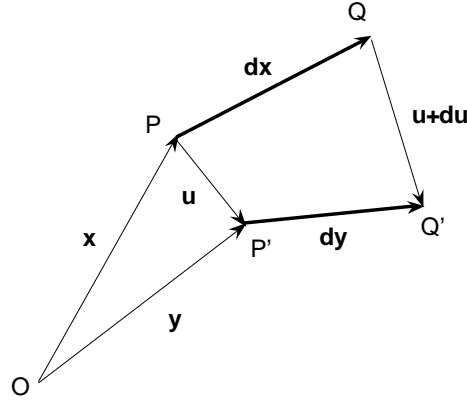
Cvičení

Ve cvičeních (1) a (2) je namísto (x_1, x_2, x_3) použito (x, y, z) .

- (1) Je dána skalární funkce $T = 3x^2y - xyz - xz^2$. Určete $\operatorname{grad} T$ a ΔT .
- (2) Vypočtete $\operatorname{rot} \mathbf{G}$ pro funkci $\mathbf{G} = (x^2 - z^2, yz, x^2 + y^2)$.
- (3) Určete $\operatorname{div}(\mathbf{r}^3)$.
- (4) Určete totální derivaci $\mathbf{G} \otimes \nabla$ pro funkci \mathbf{G} z příkladu (2).
- (5) Dokažte: $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{T}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{T} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{T}$.
- (6) Odvoďte tvar Laplaceova operátoru pro funkci $\Phi(\mathbf{r})$, kde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

2.2.4 Tenzor deformace

Deformace jsou elastické (pružné) změny stavu tělesa, při nichž dochází současně ke změně vzdálenosti libovolně blízkých bodů i ke změnám polohy elementů v důsledku rotace nebo posunutí. Popíšeme deformační změnu elementu PQ, jejímž výsledkem je element P'Q' (obr.2.4).



Obrázek 2.4: Deformace elementu PQ.

Další označení:

- \mathbf{x}, \mathbf{y} ... polohové vektory vzhledem k počátku souřadného systému O,
- \mathbf{u} ... vektor posunutí pro bod P,
- $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$... vektor posunutí pro blízký bod Q,
- $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} + d\mathbf{y} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}.$

Z posledních dvou vztahů plyne

$$d\mathbf{y} = d\mathbf{x} + d\mathbf{u}, \quad \text{tj. složkově } dy_i = dx_i + du_i. \quad (2.12)$$

Změnu polohového vektoru $d\mathbf{u}$ aproximujeme diferenciálem prvního řádu,

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (2.13)$$

a tento vztah dosadíme do (2.12):

$$dy_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j. \quad (2.14)$$

Porovnáme velikost elementu před deformací a po deformaci, tj. vyjádříme rozdíl $\|d\mathbf{y}\|^2 - \|d\mathbf{x}\|^2$. Velikost elementu před deformací je

$$\|d\mathbf{x}\|^2 = dx_k dx_k = \delta_{jk} dx_j dx_k, \quad (2.15)$$

po deformaci podle (2.14)

$$\|d\mathbf{y}\|^2 = dy_i dy_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \cdot \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_k.$$

Po zanedbání kvadratického členu a úpravě je

$$\|\mathbf{dy}\|^2 = \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k. \quad (2.16)$$

Vyjádříme-li hledaný rozdíl, bude

$$\|\mathbf{dy}\|^2 - \|\mathbf{dx}\|^2 = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (2.17)$$

Tento výsledek slouží k zavedení **tenzoru malých deformací**, jehož charakter lze ověřit na základě transformačních rovnic; je symetrický, tzn. že je určen šesti složkami:

$$\mathbf{e} = (e_{jk}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \text{symetricky} & & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Význam složek tenzoru malých deformací

Diagonální složky zjevně odpovídají relativním prodloužením (zkrácením) ve směru souřadných os, neboť (nesčítá se!)

$$e_{jj} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \approx \frac{\Delta u_j}{\Delta x_j}. \quad (2.19)$$

Mimodiagonální složky jsou přibližně rovny jedné polovině smykových úhlů, které vyjadřují, o kolik se liší úhel dvou elementů po deformaci od pravého úhlu, který svíraly před deformací :

$$e_{jk} \approx \frac{1}{2} \alpha_{j,k} \quad \text{pro} \quad |\alpha_{j,k}| \ll 1. \quad (2.20)$$

Všimněme si, že totální derivace vektoru posuvů je tenzor druhého řádu

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

který můžeme rozložit na symetrický a antisymetrický tenzor:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = e_{jk} + \omega_{jk}. \quad (2.21)$$

Tento výsledek znamená, že úplná změna polohy dvou bodů přideformaci je popsána kromě tenzoru malých deformací e_{jk} také deviatorem ω_{jk} , který vyjadřuje změnu prostorové orientace elementu.

Příklad

Dokážeme invariantnost relativní změny objemu

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V}$$

při malých deformacích.

$V = a \cdot b \cdot c$ je objem kvádrů o hranách a , b , c před deformací,

$V' = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c)$ je objem po deformaci, který dále upravíme podle (2.19):

$$V' = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = abc(1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33})$$

Jestliže provedeme roznásobení a zanedbáme členy druhého a vyššího stupně, můžeme psát

$$V' \approx V(1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) = V(1 + e_{ii}).$$

Proto

$$\delta V = \frac{V' - V}{V} = e_{ii},$$

což je invariant tenzoru 2. řádu.

2.3 Křivkové a plošné integrály

2.3.1 Křivkové integrály

V zájmu lepší přehlednosti přejdeme od indexovaných proměnných x_1, x_2, x_3 k symbolům x, y, z ; např. $P = [x, y, z]$ pro bod v prostoru, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pro jeho polohový vektor apod. Dále bude

- K (po částech) hladká křivka s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$,
- $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$... tečný vektor křivky ve zvolené parametrizaci,
- $d\boldsymbol{\ell} = (dx, dy, dz) = \dot{\boldsymbol{\psi}}(t) dt$... orientovaný element křivky,
- $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \|\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)\| dt$... jeho velikost,
- $h(x, y, z)$... hustota veličiny na křivce K ,
- $\mathbf{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$... vektorové pole na křivce a v jejím okolí.

Křivkový integrál I. druhu vyjadřuje *množství veličiny na křivce*:

$$H = \int_K h(x, y, z) d\ell. \quad (2.22)$$

Výpočet se děje převodem na určitý integrál vzhledem k parametrizaci:

$$\int_K h(x, y, z) d\ell = \int_{t_1}^{t_2} h(x(t), y(t), z(t)) \|\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)\| dt. \quad (2.23)$$

Ve speciálním případě $h \equiv 1$ na K vyjadřuje integrál I. druhu délku křivky:

$$\int_K d\ell = L. \quad (2.24)$$

Příklad

Elektrický vodič ve tvaru čtvrtiny závitů pravidelné šroubovice

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 2t), \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

má měrný odpor $\rho(x, y, z) = xy$. Vypočítejte celkový odpor.

Výpočet:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 2), \quad \|\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)\| = \sqrt{13},$$

$$R = \int_K \rho(x, y, z) \, d\ell = \int_0^{\pi/2} 9 \cos t \sin t \sqrt{13} \, dt = \dots = \frac{9}{2} \sqrt{13}.$$

Křivkový integrál II. druhu:

$$P = \int_K \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_K F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_K F_i dx_i, \quad (2.25)$$

kde $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ je průmět vektoru pole do tečného vektoru křivky. Poslední výraz je zápisem v původní tenzorové symbolice včetně sumační konvence. Tento integrál označuje obecně posuv vektoru po křivce, jeho konkrétní interpretace souvisí s typem pole \mathbf{F} – viz dále.

Je třeba si uvědomit, že křivkový integrál II. druhu závisí na orientaci křivky. Zvolená parametrizace pak musí být souhlasná se zadanou orientací. Výpočet spočívá opět převodu na určitý integrál:

$$\int_K \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{t_1}^{t_2} (F_1(t), F_2(t), F_3(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}(t) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (F_1 \dot{x} + F_2 \dot{y} + F_3 \dot{z}) \, dt. \quad (2.26)$$

Příklad

Je dán oblouk paraboly $K = \{z = 1 - x^2 - y^2, y = x, x \geq 0, z \geq 0\}$ orientovaný ve směru rostoucí souřadnice x . Máme vypočítat

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}, \quad \mathbf{F} = (xy, z, -x).$$

Nejprve provedeme parametrizaci křivky K :

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t, 1 - 2t^2), \quad t \in \langle 0, \sqrt{2}/2 \rangle.$$

Dále pokračujeme podle (2.26):

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} (t^2, 1 - 2t^2, -t) \cdot (1, 1, -4t) \, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} (3t^2 + 1) \, dt = \frac{3}{4} \sqrt{2}.$$

2.3.2 Plošné integrály

Analogicky jako u křivkových integrálů vyjadřuje **plošný integrál I. druhu** množství veličiny o hustotě h na ploše S :

$$H = \int_S h(x, y, z) \, dS. \quad (2.27)$$

Ve speciálním případě $h \equiv 1$ na S je číselně roven velikosti plochy S : $\int_S dS = |S|$.

V souladu s článkem 2.1.1 je $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y), [x, y] \in D \subset \mathbb{R}^2\}$. Výpočet se

děje převodem na dvojný integrál přes oblast D , která je průmětem plochy S do roviny $z = 0$, přičemž pro element dS platí vztah (2.3):

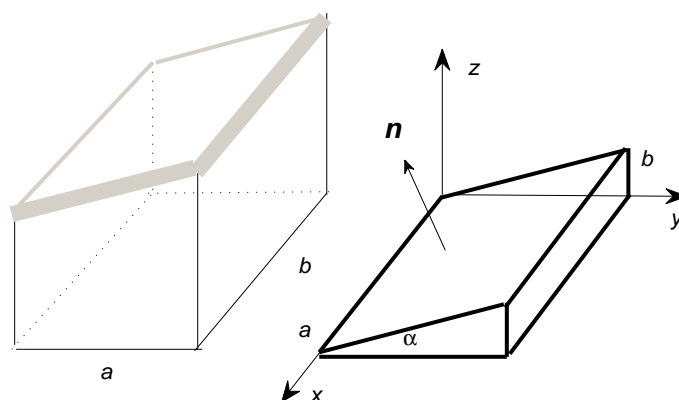
$$H = \int_S h(x, y, z) dS = \iint_D h(x, y, f(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy . \quad (2.28)$$

Příklad

Střecha budovy je pokryta sněhem (obr. 2.5) o plošné hustotě

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + c(y + z)},$$

kde γ_0 a c jsou konstanty. Vypočítejte celkovou hmotnost sněhové zátěže.



Obrázek 2.5: Sněhová kalamita.

Při výpočtu nehraje roli výška budovy, ale její půdorys a úhel sklonu střechy α , který pokládáme rovněž za zadaný. Rovnice střešní roviny je $z = ky$, $k = \tan \alpha$, takže pro normálový vektor platí:

$$\mathbf{n} = (0, -k, 1), \quad n = \|\mathbf{n}\| = \sqrt{k^2 + 1} .$$

Hledanou hmotnost sněhu vyjádříme plošným integrálem I. druhu:

$$m = \int_S \gamma(x, y, z) dS = \int_S \frac{\gamma_0}{1 + c(y + z)} dS = \gamma_0 \iint_D \frac{1}{1 + c(k + 1)y} dx dy .$$

Integrační oblast je půdorys budovy $D = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$, výpočet dvojného integrálu vede k výsledku

$$m = \frac{a\gamma_0\sqrt{k^2 + 1}}{c(k + 1)} \ln [1 + bc(k + 1)] .$$

Pro vstupní data $a = 6$ m, $b = 3$ m, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma_0 = 750$ kgm⁻³, $c = 6$ m⁻¹ obdržíme hodnotu 1856 kg.

Plošný integrál II. druhu vektorové funkce $\mathbf{F}(x, y, z)$ na orientované ploše S zavádíme předpisem

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{resp.} \quad \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dS , \quad (2.29)$$

kde \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor normály. Výrazy jsou kompatibilní, druhý z nich obdržíme z prvního užitím relací (2.2) a (2.3). Jako v přechodím případě uvažujeme explicitně zadanou (dvojstrannou) plochu

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y), [x, y] \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Její orientaci budeme pokládat za kladnou tehdy, svírá-li normálový vektor ostrý úhel s osou z . Výpočet plošného integrálu II. druhu se opět děje převodem na dvojný integrál:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \mathbf{n}(x, y) dx dy . \quad (2.30)$$

Příklad

Vypočteme integrál z funkce $\mathbf{F} = (0, z^2, x^2 + y^2)$ na části kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ v prvním oktantu orientované ve směru vnější normály.

Rovnice plochy je $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, takže pro normálový vektor platí

$$\mathbf{n}(x, y) = (-f'_x, -f'_y, 1) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) .$$

Jeho směr je ovšem na celé ploše "dovnitř" kuželové plochy, takže vzhledem k zadání je nutno vynásobit integrál znaménkem minus. Podle (2.30) tedy bude

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_D (0, x^2 + y^2, x^2 + y^2) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy = \\ &= \iint_D (y\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2) dx dy = \dots = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

Výpočet je proveden s použitím transformace do polárních souřadnic.

2.3.3 Integrální věty

Ve vektorové a tenzorové analýze je k dispozici množství matematických vět, které představují velmi účinný nástroj pro odvozování a formulování teoretických ni aplikačních úloh. Zaměříme se na základní vztahy, se kterými se lze setkat. Princip důkazu provedeného pro případ (Ia) lze uplatnit i ve zbývajících větách.

(I) Pro $\varphi, v_i (i = 1, 2, 3) \in C^1(\bar{\Omega})$ je

$$(a) \int_{\partial\Omega} \varphi d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi dV , \quad (b) \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{v} dV . \quad (2.31)$$

Důkaz provedeme pouze pro rovnost (a), a to bez újmy na obecnosti pro oblast $\Omega = \{0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2), [x_1, x_2] \in D \subset \mathbb{R}^2\}$ a třetí složku gradientu:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_D \left(\int_0^f \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_D [\varphi(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) - \varphi(x_1, x_2, 0)] dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \varphi(x_1, x_2, x_3) dS_3 . \end{aligned}$$

(II) **Gaussova–Ostrogradského věta** Má-li pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ spojitě diferencovatelné složky na jednoduše souvislé oblasti Ω ohraničené (po částech) hladkou kladně orientovanou plochou $\partial\Omega$, pak platí:

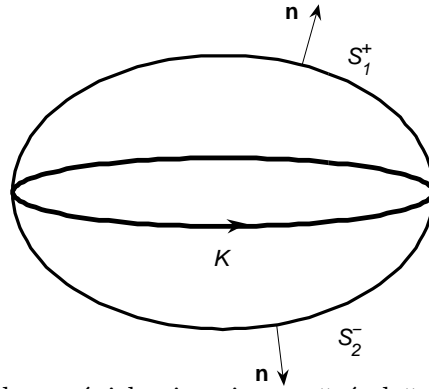
$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\Omega . \quad (2.32)$$

Kladnou orientací uzavřené plochy rozumíme orientaci ve směru její vnější normály.

(III) **Stokesova věta** Nechť pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ má spojitě diferencovatelné složky na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^3$, v níž leží hladká plocha S ohraničená hladkou souhlasně orientovanou křivkou K . Pak platí:

$$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.33)$$

Křivka i plocha mohou být případně pouze po částech hladké. Při souhlasné orientaci splňují pravidlo pravé ruky: ukazuje-li palec pravé ruky směr normály k ploše S , míří její prsty ve směru souhlasné orientace křivky K . Na místě je otázka, zda ve Stokesově větě



Obrázek 2.6: K výkladu nezávislosti na integrační ploše u Stokesovy věty.

můžeme plochu S procházející křivkou K volit libovolně (ve smyslu předpokladů věty). Odpověď je kladná, jak vyplývá z následující analýzy. Mějme libovolnou uzavřenou křivku K ležící na uzavřené ploše S ohraničující objem Ω (obr. 2.6). Touto křivkou je plocha rozdělena na dvě opačně orientované části S_1^+ , S_2^- . Uvažujme dále pole $\mathbf{G} \in C^1(\Omega)$. Pro jeho tok uzavřenou plochou S můžeme jednak použít Gaussovu–Ostrogradského větu,

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} \, d\Omega ,$$

jednak ho můžeme určit jako součet plošných integrálů,

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1^+} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2^-} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} .$$

Nechť je nyní speciálně $\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$ jako na pravé straně (2.33). Protože $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, je celkový tok uzavřenou plochou S nulový, a tedy

$$\int_{S_1^+} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2^-} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{neboli} \quad \int_{S_1^+} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2^+} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} .$$

Kterákoli z ploch jdoucích křivkou K dává tedy při použití Stokesovy věty stejný výsledek. Výhodu možnosti volby ukazuje následující příklad.

2.4 Charakteristiky tenzorových polí

2.4.1 Globální charakteristiky

Tyto charakteristiky se ve vektorové analýze vyjadřují prostřednictvím integrálních operátorů na křivkách či plochách nacházejících se v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dvě základní veličiny, které v této souvislosti studujeme, jsou cirkulace pole po křivce a tok pole uzavřenou plochou.

- **Posuv vektoru \mathbf{F} po křivce K** se vyjadřuje křivkovým integrálem 2. druhu. Je-li křivka při posuvu pole \mathbf{F} uzavřená, hovoříme o **cirkulaci pole po křivce** a značíme ji

$$C = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.34)$$

Při typické aplikaci v mechanice udává tento integrál práci vykonanou silou \mathbf{F} působící po dráze K .

- **Tok vektoru plochou** je reprezentován plošným integrálem 2. druhu (orientovaným)

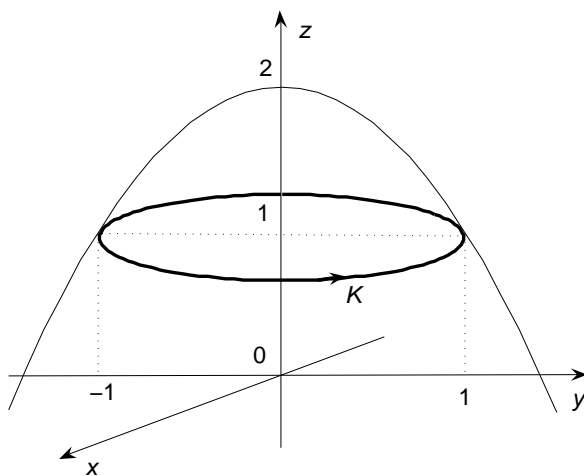
$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}(-1)^{i-1} \varepsilon_{ijk} \int_S F_i dx_j dx_k = \int_S F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_1 dx_3 + F_3 dx_1 dx_2, \quad (2.35)$$

kde $d\mathbf{S} = (dx_2 dx_3, dx_1 dx_3, dx_1 dx_2)$ je orientovaný element plochy S . Bude-li například \mathbf{v} pole rychlosti proudící tekutiny, pak tento plošný integrál udává objemový průtok plochou S za jednotku času. V případě **toku pole \mathbf{F} uzavřenou plochou S** píšeme

$$Q = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.36)$$

Příklady

- (a) Vypočteme cirkulaci pole $\mathbf{F} = (x^2 + yz, 2yz - zx, y^2)$ po kružnici K , která je řezem parabolické plochy $x^2 + y^2 + z = 2$ rovinou $z = 1$. Orientace křivky je souhlasná s osou z – viz obr. 2.7.

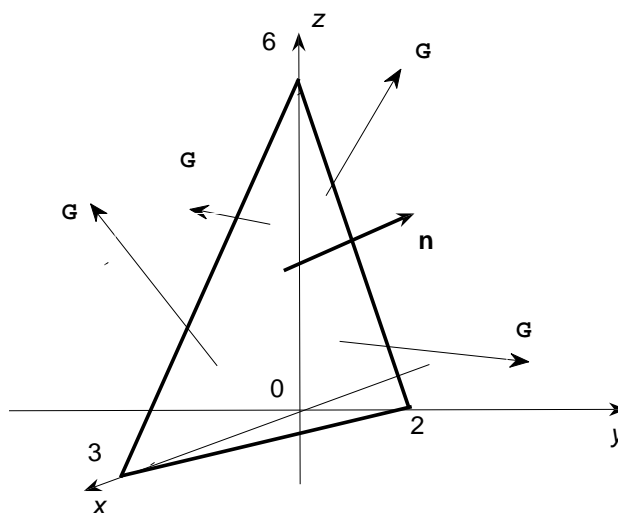


Obrázek 2.7: Kružnice na parabolické ploše.

Pro zadanou úlohu zvolíme parametrizaci $\boldsymbol{\psi}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, takže

$$C = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin t, 2 \sin t - \cos t, \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi .$$

- (b) Stanovíme tok pole $\mathbf{G} = (x, 3y+z, -2x)$ částí roviny $2x+3y+z-6=0$ určené podmínkami $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Normálový vektor \mathbf{n} je orientován souhlasně s osou z – viz obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Tok rovinou v I. oktantu.

V zadaném příkladě je $z = 6 - 2x - 3y$ a vektor $\mathbf{n} = (2, 3, 1)$ je konstantní, protože se jedná o rovinu. Proto

$$Q = \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{xy}} (x, 6 - 2x, -2x) \cdot (2, 3, 1) dx dy = \int_0^3 (18 - 6x) \left(\int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy \right) dx = 36 .$$

- (c) Určíme tok pole $\mathbf{F} = (xy - z^2, 2xz, y - x^2)$ vnějškem povrchu krychle $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle$. Bez použití G.-O. věty by se výpočet provedl jako součet šesti plošných integrálů přes jednotlivé stěny krychle. Při její aplikaci však snadno určíme $\operatorname{div} \mathbf{F} = y$ a dosadíme do objemového integrálu:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} y d\Omega = \int_0^a dx \int_0^a y dy \int_0^a dz = \frac{1}{2} a^4 .$$

- (d) Použijeme Stokesovu větu k řešení příkladu (a). Kružnicí K na obr. 2.7 prochází kromě generující parabolické plochy celá řada dalších ploch. Nejvýhodnější pro výpočet bude rovina $z = 1$, jejíž normálový vektor $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ máme bezprostředně k dispozici. Průmětem kružnice do roviny $z = 0$ je obvod kruhu $D_{xy} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Snadno získáme $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (x, y, -2z)$, takže

$$C = \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{D_{xy}} (x, y, -2z) \cdot (0, 0, 1) dx dy = -2 \iint_{D_{xy}} dx dy = -2|D_{xy}| = -2\pi .$$

Symbolem $|D_{xy}|$ je označena velikost průmětu D_{xy} , v našem případě obsah kruhu o poloměru 1.

2.4.2 Lokální charakteristiky

Přechod od globálních charakteristik k lokálním je realizován limitním procesem, při němž zmenšujeme objem (plochu), kde je globálně bilancována daná veličina, až do jediného bodu. Zavedeme veličinu $\mu(\Omega)$ jako míru oblasti Ω , například její objem, povrch, poloměr apod. Dále budeme předpokládat, že hustota $f(\mathbf{x})$ je na referenční oblasti spojitá funkce, $f \in C(\bar{\Omega})$. Pak proces spojitého zmenšování oblasti Ω až do nějakého bodu M můžeme symbolicky vyjádřit relací

$$\Omega \longrightarrow M \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\Omega) \longrightarrow 0 .$$

Aplikujeme-li tento princip na objemový integrál na oblasti Ω , obdržíme zobecněnou definici střední integrální hodnoty ve tvaru

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f dV = f(M) . \quad (2.37)$$

Tento limitní přechod dává možnost definovat podle Gaussovy-Ostrogradského věty (2.32) divergenci pole \mathbf{v} jako lokální charakteristiku v bodě M :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{v} . \quad (2.38)$$

V analogii s obecným případem je tedy divergence pole hustotou (mírou) jeho zřídlovosti. Podobně lze lokálně zavést s využitím formulí (2.31) zbývající dva diferenciální operátory:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\partial\Omega} u d\mathbf{S} = \mathbf{grad} u , \quad (2.39)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times d\mathbf{S} = \mathbf{rot} \mathbf{v} . \quad (2.40)$$

Poslední relace ukazuje rotaci jako míru vírovosti. Vhodnou aplikací diferenciálních operátorů na konkrétní fyzikální pole můžeme v libovolném bodě (tj. lokálně) získat informace o jeho vlastnostech.

Gradient a derivace ve směru

Mějme dáno skalární pole $T = T(x_1, x_2, x_3)$ a zvolme libovolný směr jako vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Derivaci funkce T ve směru \mathbf{s} definujeme jako skalární veličinu

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{grad} T , \quad \mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} ,$$

kde \mathbf{s}_0 je jednotkový (normovaný) vektor \mathbf{s} . Důsledkem je známý fakt, že *gradient funkce* $T = T(X)$ *udává směr největší změny této funkce v bodě* X . Je to zřejmé z následujícího vyjádření derivace ve směru:

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{grad} T = \|\mathbf{s}_0\| \|\mathbf{grad} T(X)\| \cos \alpha .$$

Protože $\|\mathbf{s}_0\| = 1$, bude tento výraz maximální tehdy, když pro úhel α mezi gradientem a vektorem \mathbf{s} bude platit $\cos \alpha = 1$. To nastane pro $\alpha = 0$, tj. splynou-li směry vektorů \mathbf{s} a $\mathbf{grad} T(X)$.

Zřídlovost pole

Aplikujeme-li operátor divergence na vektorové pole \mathbf{T} v bodě $X = (x_1, x_2, x_3)$, obdržíme skalární hodnotu (číslo). Je-li $\operatorname{div} \mathbf{T}(X) = 0$, nazývá se X nezřídlový bod. Je-li $\operatorname{div} \mathbf{T}(X) \neq 0$, je X zřídlovým bodem. Speciálně se X nazývá zřídlo, je-li $\operatorname{div} \mathbf{T}(X) > 0$, resp. propad, když $\operatorname{div} \mathbf{T}(X) < 0$.

Platí-li na nějaké oblasti Ω $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$ ($\operatorname{div} \mathbf{T} \neq 0$), říkáme, že pole \mathbf{T} je na této oblasti nezřídlové (zřídlové). Divergence tedy umožňuje charakterizovat míru zřídlovosti pole neboli distribuci zdrojů na oblasti Ω .

Příklad

Ukážeme, že pole $\mathbf{F} = (x_1^2 x_2, -2x_2 x_3, x_3^2 - 2x_1 x_2 x_3)$ je nezřídlové na libovolné oblasti v \mathbb{R}^3 .

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 2x_1 x_2 - 2x_3 + 2x_3 - 2x_1 x_2 = 0.$$

Pro nezřídlové pole, v němž $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ na Ω , platí jako důsledek Gaussovy–Ostrogradského věty

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Opačné tvrzení však neplatí: je-li $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$, pak může jít jak o nezřídlové pole, tak o pole zřídlové, v němž však jsou kladné a záporné zdroje v rovnováze.

Vírovost pole

Jestliže na oblasti Ω platí $\operatorname{rot} \mathbf{T} = \mathbf{o}$ ($\operatorname{rot} \mathbf{T} \neq \mathbf{o}$), nazývá se pole \mathbf{T} nevírové (vírové). Podle 2.2.3 je $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{o}$ pro každou funkci $\varphi \in C^2(\Omega)$. Proto lze nevírové pole \mathbf{T} vyjádřit jako gradient jistého skalárního pole φ , tj. $\mathbf{T} = \operatorname{grad} \varphi$. Pole φ se nazývá potenciál vektorového pole \mathbf{T} (pole \mathbf{T} je potenciálové).

Příklady

- (a) Vyšetříme vírovost rychlostního pole tuhého tělesa rotujícího kolem osy s konstantní úhlovou rychlostí ω . Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat rotaci kolem osy $x_3 = z$ – viz obrázek 2.9, kde je dále

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \quad \dots \quad \text{vektor úhlové rychlosti,}$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad \dots \quad \text{polohový vektor libovolného bodu tělesa,}$$

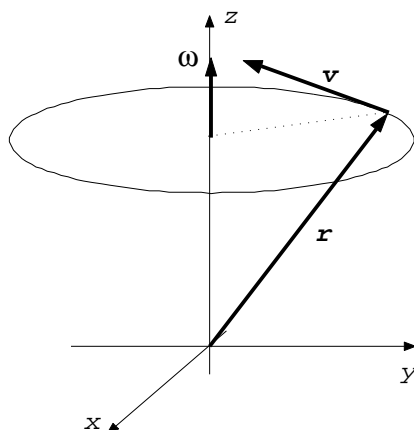
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x, 0) \quad \dots \quad \text{postupná (obvodová) rychlost, protože } \mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \perp \mathbf{r}.$$

Výpočtem obdržíme rotaci rychlostního pole $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega)$. Tento výsledek ukazuje, že rychlostní pole rotujícího tělesa je vždy vírové.

- (b) Mějme vektorové pole $\mathbf{F} = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2)$. Snadno lze ukázat, že je nevírové, neboť $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$. Proto existuje jeho potenciál φ takový, že $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \varphi$. Toto pole je navíc nezřídlové, protože $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Spojením těchto dvou vlastností dostáváme

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \text{neboli} \quad \Delta \varphi = 0,$$

což je Laplaceova diferenciální rovnice. Protože každá funkce, která vyhovuje této rovnici, se nazývá harmonická, je skalární pole φ harmonické.



Obrázek 2.9: Rotace kolem osy.

2.4.3 Maxwellovy rovnice

Předchozí poznatky se s výhodou uplatní při odvození Maxwellových rovnic ze základních fyzikálních zákonů elektromagnetismu, jak ilustrují následujících příklady variant v integrálním i diferenciálním tvaru.

Gaussův zákon

Je-li $\rho(\mathbf{r})$ hustota elektrického náboje v objemu Ω , vypočte se celkový náboj Q jako objemový integrál z této hustoty. Tato produkce zdrojů je rovna toku elektrické indukce povrchem $\partial\Omega$, tj. platí

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.41)$$

Jestliže na plošný integrál uplatníme Gaussovu-Ostrogradského větu a provedeme přechod k lokálním charakteristikám, obdržíme příslušnou rovnici ve známém diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho . \quad (2.42)$$

Speciálně je pak $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ pro nezřídlové pole (objem bez volných nábojů).

Jedná-li se o anizotropní prostředí, je jeho permitivita tenzorem 2. řádu. Dosadíme-li do (2.42) příslušnou konstituční relaci $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$, bude

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ij} E_j) = \rho , \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \rho \quad (2.43)$$

(dvakrát zúžený tenzor 4. řádu). Druhý z výrazů platí v homogenním prostředí.

Faradayův zákon

Elektrické napětí U indukované ve vodivé uzavřené smyčce v proměnném magnetickém poli o indukčním toku Φ je rovno časové změně tohoto toku, tj. $U = -d\Phi/dt$.

Označíme-li S libovolnou hladkou plochu procházející uzavřenou smyčkou K , můžeme napětí a indukční tok vyjádřit následovně:

$$U = \int_K \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} , \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} ,$$

kde \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou po řadě vektory elektrické intenzity a magnetické indukce. V rovnosti

$$\int_K \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

použijeme na levé straně Stokesovu větu, abychom na obou stranách rovnice disponovali stejným typem integrálu:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (2.44)$$

Limitním přechodem lze pak získat formulaci Faradayova zákona v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t . \quad (2.45)$$

2.4.4 Nezávislost na integrační cestě

V nevírovém poli ($\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$) musí být cirkulace $\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku K . Současně plyne z podmínky $\mathbf{F} = \mathbf{grad} U$ existence potenciálu $U(x, y, z)$. Není-li křivka uzavřená, můžeme výpočet křivkového integrálu snadno provést následujícím způsobem. Při parametrizaci $\boldsymbol{\psi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ označíme po řadě A a B její počáteční a koncový bod, takže bude $\boldsymbol{\psi}(t_1) = A$, $\boldsymbol{\psi}(t_2) = B$. Pak platí:

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = [U(x, y, z)]_A^B = U(B) - U(A) , \quad (2.46)$$

neboť podle formule pro derivaci složené funkce je

$$\int_K \mathbf{grad} U \cdot d\mathbf{l} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{grad} U(\boldsymbol{\psi}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [U'_x \dot{x}(t) + U'_y \dot{y}(t) + U'_z \dot{z}(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}(t) dt .$$

Tento výsledek znamená, že v potenciálovém poli hodnota křivkového integrálu nezávisí na integrační cestě. Jeden ze způsobů stanovení potenciálu ukazuje další příklad.

Příklad

Máme vypočítat integrál $I = \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, kde $\mathbf{F} = (2xy - z, x^2, 2z - x)$ a křivka K je úsečka mezi body $A = [1, 1, 1]$ a $B = [2, 3, 4]$.

Nejprve výpočtem ověříme, že jde o potenciálové pole, neboť $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Jelikož $\mathbf{F} = \mathbf{grad} U$, bude

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy - z \implies U = \int (2xy - z) dx = x^2 y - zx + C_1(y, z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \implies U = \int x^2 dy = x^2 y + C_2(x, z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z - x \implies U = \int (2z - x) dz = z^2 - xz + C_3(x, y).$$

Hledaný potenciál je sjednocením této trojice funkcí:

$$U(x, y, z) = x^2 y - zx + z^2 + C.$$

Pro integrál I pak podle (2.46) dostáváme

$$I = [x^2 y - zx + z^2]_{[1,1,1]}^{[2,3,4]} = 19 .$$

Cvičení

(1) Intenzita elektrostatického pole bodového náboje q v prostředí s permitivitou ε umístěného v počátku souřadného systému je dána vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

Dokažte, že pole \mathbf{E} je pro $r \neq 0$ nezřídlové a nevírové.

- (2) Změna energie U ideálního plynu při adiabatickém ději je vyjádřena jako součet dodaného (uvolněného) tepla Q a vykonané (spotřebované) práce A rovnicí

$$\delta U = \delta Q + \delta A = c_v dT + p dV ,$$

kde p , V , T jsou stavové veličiny (tlak, objem a teplota) a c_v je měrné teplo při konstantním objemu. S použitím stavové rovnice ideálního plynu ($pV = RT$) dokažte, že tato změna nemá potenciálový charakter a posuďte důsledky této skutečnosti.

- (3) Vypočítejte posuv pole $\mathbf{G} = (z, z, -y)$ po úsečce z bodu $[1, 0, 1]$ do bodu $[0, 1, 0]$.
- (4) Určete tok pole \mathbf{G} z předchozího příkladu povrchem části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ve směru vnější normály.
- (5) Jakou práci vykoná síla $\mathbf{F} = (x + y, y - z, y)$ působící po obvodu trojúhelníka vyřatého v rovině $2x + 3y + z - 6 = 0$ souřadnými rovinami? (Pozn.: trojúhelník je znázorněn na obr. 2.8.)
- (6) Vyčíslete tok pole $\mathbf{F} = (2xz, y, x)$ vnějškem povrchu válce $\{x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 6\}$.
- (7) Dokažte, že pole $\mathbf{G} = (y^2 + z, 2xy - z^2, x - 2yz)$ je potenciálové a vypočítejte jeho posuv mezi body $[-1, -1, -2]$ a $[1, 1, 2]$.

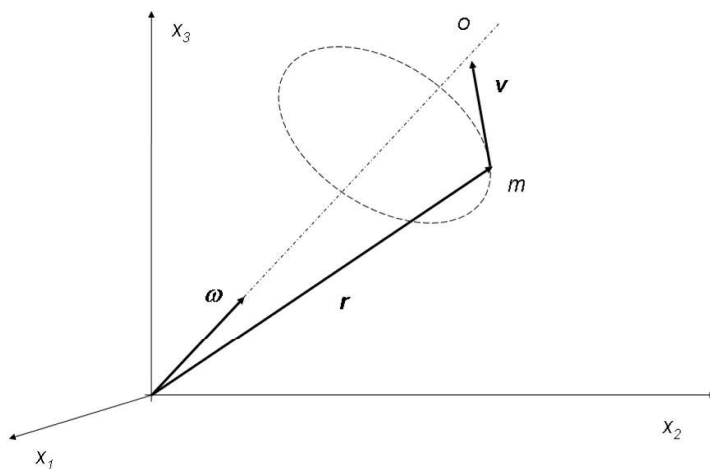
Kapitola 3

Aplikace tenzorového aparátu

3.1 Tenzor setrvačnosti

Uvažujme tuhé těleso otáčející se úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ a jeho libovolný bod o hmotnosti m ležící mimo osu rotace. Označíme $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ jeho polohový vektor a \mathbf{v} jeho postupnou (obvodovou) rychlost, pro kterou platí $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ – obr. 3.1. Moment hybnosti bodu je dán vztahem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) . \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Rotace hmotného bodu.

Nechť je těleso tvořeno K body o hmotnostech m_k , $k = 1, 2, \dots, K$, majících polohové vektory $\mathbf{r}_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$ a momenty hybnosti $\mathbf{M}_k = (M_{k1}, M_{k2}, M_{k3})$; všechny rotují se stejnou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Celková hybnost tělesa je součtem jednotlivých hybností, tj.

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^K \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^K m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) . \quad (3.2)$$

Upravíme-li dvojný vektorový součin na základě relace (1.35),

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} ,$$

lze po úpravě předchozí rovnici napsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K m_k (x_{k2}^2 + x_{k3}^2) & - \sum_{k=1}^K m_k x_{k1} x_{k2} & - \sum_{k=1}^K m_k x_{k1} x_{k3} \\ - \sum_{k=1}^K m_k x_{k1} x_{k2} & \sum_{k=1}^K m_k (x_{k1}^2 + x_{k3}^2) & - \sum_{k=1}^K m_k x_{k2} x_{k3} \\ - \sum_{k=1}^K m_k x_{k1} x_{k3} & - \sum_{k=1}^K m_k x_{k2} x_{k3} & \sum_{k=1}^K m_k (x_{k1}^2 + x_{k2}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

nebo úsporněji ve tvaru tenzorovém:

$$M_i = J_{ij} \omega_j, \quad (3.3)$$

kde \mathbf{J} je tenzor setrvačnosti s prvky

$$J_{ij} = \begin{cases} - \sum_{k=1}^K m_k x_{ki} x_{kj}, & i \neq j, \\ \sum_{k=1}^K m_k (x_{kl}^2 + x_{kn}^2), & i = j \neq l \neq n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Diagonální prvky J_{11} , J_{22} a J_{33} představují momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám, mimodiagonální prvky se nazývají deviační momenty. Pokud je osa rotace tělesa současně jeho osou souměrnosti, deviační momenty vymizí. V opačném případě dochází při rotaci k nepravidelnému (nežádoucím) namáhání tělesa. Speciálně: pro bod na ose rotace je $\boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{r}$ s jistou konstantou λ (viz obrázek), takže $\mathbf{B} = \mathbf{o}$.

Cvičení

Ověřte předchozí výsledek pomocí tenzorových operací s použitím vzorce (3) v článku 1.6.2. Zdůvodněte tenzorový charakter veličiny \mathbf{J} .

3.2 Statická teorie elasticity

Matematický aparát statické (a následně i dynamické) teorie pružnosti patří k typickým oblastem, v nichž se uplatňují přednosti tenzorového počtu. Budeme věnovat vlastnostem tenzorů napětí a deformace a rovněž jejich vzájemnému vztahu, který je představován zobecněným Hookeovým zákonem.

3.2.1 Motivace

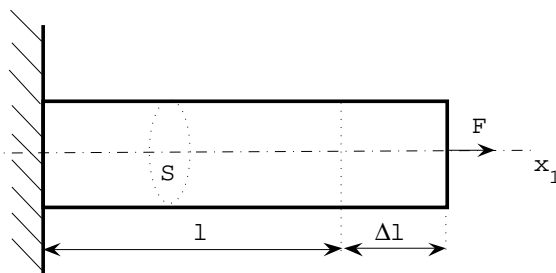
Pro určení vztahu mezi napětím τ a deformací e je prvořadé vymezit oblast jevů, jejichž popis chceme formulovat. Uvažujme jako modelovou situaci tahovou zkoušku dlouhé úzké tyče. Předpokládáme, že je podrobena jednosměrnému tahu silou o velikosti F ve směru osy x_1 (obr. 3.2), přičemž se její průřez S nemění.

Při působícím normálovém napětí $\tau = F/S$ prodlouží tahová síla tyč délky l o Δl , takže deformace je rovna poměrnému prodloužení $e = \Delta l/l$.

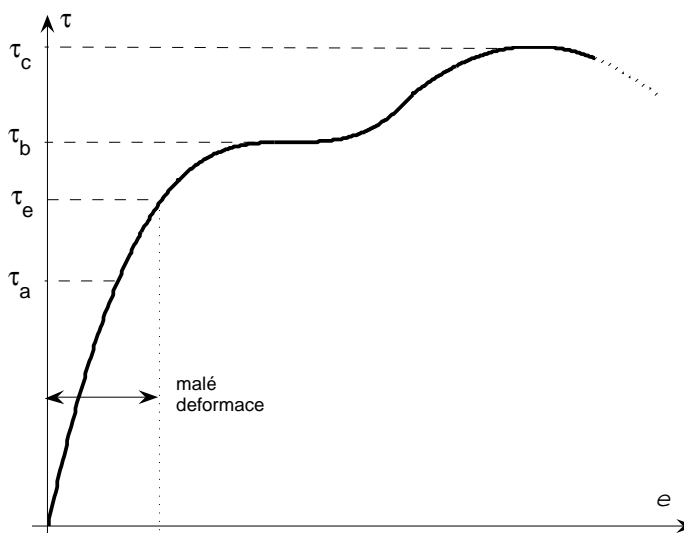
Diagram tahové zkoušky na obr. 3.3 ukazuje příklad vztahu mezi napětím a deformací (jedná se o určitý typ oceli). Významné body na grafu představují

mez pevnosti τ_c ;

mez kluzu τ_b ;



Obrázek 3.2: Tahová zkouška.



Obrázek 3.3: Závislost mezi napětím a deformací.

mez pružnosti τ_e : pro $\tau \leq \tau_e$ se těleso po odlehčení vrátí do původního stavu (hovoříme o pružné deformaci), pro $\tau > \tau_e$ část deformace přetrvává (plastická deformace);

mez úměrnosti τ_a , která vymezuje důležitou oblast lineární pružnosti ($\tau < \tau_a$), kde je napětí přímo úměrné deformaci:

$$\tau = E e . \quad (3.5)$$

Tento vztah se nazývá *základní Hookeův zákon* a konstantou úměrnosti v něm je tzv. *Youngův modul pružnosti* E [Nm^{-2}].

Spojením předchozích vztahů dostáváme

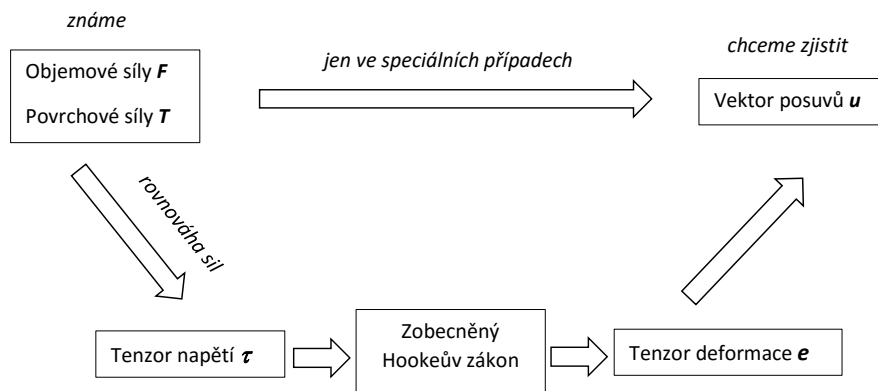
$$e = \frac{1}{E} \tau \quad \text{neboli} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} . \quad (3.6)$$

Uvedenou formulaci je třeba zobecnit, avšak stále budeme uvažovat lineární pružnost, tedy malé deformace – viz obrázek. I v takovém případě je popis napětíového a tedy i přetvárného stavu mnohem komplikovanější, a proto musíme využít bohatší teoretický aparát. Budeme popisovat stav napjatosti na elementárním objemu (jednoduše souvislé oblasti) V s hranicí ∂V (po částech hladká). Na tento objem působí dva druhy sil:

- vnitřní síly o hustotě \mathbf{F} mají stejný účinek ve všech jeho bodech (např. setrvačné síly, tíhová síla aj.),

- plošné síly o hustotě \mathbf{T} působící zvnějšku různým způsobem v bodech jeho povrchu (jde o působení okolních elementů).

Jejich účinek je vyjádřen vektorem posuvů pro libovolný bod tělesa. Jelikož přímá vzájemná závislost je k dispozici jen ve velmi jednoduchých případech (viz výše), je nutno napětově-přetvárný stav popsat pomocí tenzorů napětí a deformace. Klíčovou roli pak hraje vazba mezi těmito tenzory, kterou zprostředkovává zobecněný Hookeův zákon (viz schéma na obr. 3.4). Než se jím budeme zabývat podrobněji, vrátíme se několika poznámkami k uvedeným tenzorům.



Obrázek 3.4: Schéma modelování napětově-přetvárného procesu.

3.2.2 Speciální případy tenzoru napětí

Tento tenzor jsme zavedli v kapitole 1.4. Všimněme si nejprve několika typických atributů vektoru napětí ($\boldsymbol{\nu}_0$ je jednotkový vektor normály):

1. $\mathbf{T}^{(\nu)} = -\mathbf{T}^{(-\nu)}$ (zákon akce a reakce),
2. $\mathbf{T}^{(\nu)} \cdot \boldsymbol{\nu}_0 = N$ (normálové napětí),
3. $\mathbf{T}^{(\nu)} - N \cdot \boldsymbol{\nu}_0 = \mathbf{S}$, $S = \|\mathbf{S}\|$ (tečné napětí).

Důsledkem první vlastnosti je symetrie tenzoru napětí, kterou exaktně ověříme v části 3.4.1. Proto můžeme vztah (1.25) používat ve tvaru

$$T_i^{(\nu)} = \tau_{ij} \nu_j, \quad (3.7)$$

Speciální případy

- (a) **Homogenní napětí.** Deviator = 0 \Rightarrow neexistují smyková napětí, Cauchyho kvadrík je kulová plocha.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

(b) **Jednoduchý (jednosměrný) tlak nebo tah** (zde: ve směru osy x_1):

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cauchyho kvadrika má rovnici $\tau x_1^2 = k^2$, která představuje dvě rovnoběžné roviny, na které je působící síla kolmá.

(c) **Jednoduché rovinné napětí** (v rovině kolmé na osu x_3):

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příkladem je mimo jiné membrána.

(d) **Jednoduchý smyk** je charakterizován tenzorem, kterým je pouze deviator reprezentující smyková napětí (zde: smyk je iniciovaný opačnými silami rovnoběžnými s osou x_2 a působícími v paralelních rovinách kolmých na osu x_1):

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3.2.3 Rovnice kompatibility deformací

Známe-li vektor posunutí \mathbf{u} , můžeme jednoznačně stanovit šestici složek tenzoru malých deformací e_{jk} na základě vztahu

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (3.8)$$

Řešíme-li opačnou úlohu, máme k dispozici 6 rovnic

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 2e_{jk} \quad (3.9)$$

pro tři neznámé funkce $u_i(x)$. V tomto případě není řešení určeno jednoznačně, a proto je třeba hledat doplňující vztahy mezi složkami tenzoru e_{jk} .

Deformace tělesa se skládá z lokálních změn velikosti a orientace jeho elementů a dále z rotací a posuvů celého tělesa v prostoru. Obojí se děje současně, lze však pracovat s předpokladem, že výsledný stav po deformaci by byl stejný i v případě, že by jednotlivé změny probíhaly odděleně v libovolném pořadí. Jednotlivé změny se tedy navzájem doplňují, jsou kompatibilní. Podmínku pro platnost tohoto předpokladu můžeme formulovat tak, že těleso spojitě (kompaktní) před deformací zůstává spojitě i po deformaci, což je ekvivalentní s požadavkem $e_{jk} \in C^2(\bar{\Omega})$.

Exaktním vyjádřením uvedených vlastností jsou tzv. *Saint-Venantovy rovnice kompatibility*, které mohou být formulovány například takto:

Nechť Ω je konvexní těleso. Pak $e_{jk} \in C^2(\bar{\Omega})$ jsou prvky tenzoru malých deformací, právě když splňují následující vztahy:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} = 0 \quad \text{pro } i, j = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Příklad

Jako ukázkou rozepíšeme jednu ze šesti výše uvedených rovnic kompatibility, konkrétně pro $i = 1, j = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Cvičení

1. Ověřte tenzorový charakter tenzoru napětí.
2. Rovinná napjatost desky v rovině xy je popsána tenzorem

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix}.$$

Odvoďte složky tohoto tenzoru při otočení v rovině o úhel ϕ . Řešte nejprve obecně a poté výsledek zapište pro $\phi = \pi/3$.

3. Zapište rovnici kompatibility pro $i = j = 3$.

3.3 Zobecněný Hookeův zákon**3.3.1 Zobecněný Hookeův zákon**

Je-li v trojrozměrném případě vztah mezi napětím a deformací lineární, platí *zobecněný Hookeův zákon* ve tvaru

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \quad (3.11)$$

kde c_{ijkl} je tenzor elastických koeficientů, který má teoreticky 81 složek. Ve skutečnosti je však určen pouze jednadvaceti složkami, neboť platí

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (e_{kl}, \tau_{ij} \text{ jsou symetrické}),$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad \text{atd.} \quad (\text{zákon akce a reakce}).$$

Jedná-li se o izotropní materiál, je tenzor elastických koeficientů nutně izotropní a lze ho vyjádřit tenzorem η_{ijkl} , který jsme poznali v příkladu v části 1.3.3:

$$\eta_{ijkl} = A \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + B \cdot \delta_{ik} \delta_{jl} + C \cdot \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.12)$$

Zavedeme nejprve novou trojici konstant těmito vztahy:

$$\lambda = A, \quad \mu = \frac{B+C}{2}, \quad \nu = \frac{B-C}{2},$$

takže bude

$$\eta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Tento výraz dosadíme do (3.11) za tenzor elastických koeficientů:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = \eta_{ijkl} e_{kl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) e_{kl} + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) e_{kl} = \\ &= \lambda \delta_{ij} e_{kk} + \underbrace{\mu (\delta_{ik} e_{jk} + \delta_{il} e_{jl})}_{= 2e_{ij}} + \underbrace{\nu (\delta_{ik} e_{jk} - \delta_{il} e_{jl})}_{= 0}. \end{aligned}$$

Označíme-li $\vartheta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{kk}$ invariant tenzoru deformace, dostáváme předchozí výsledek ve tvaru

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2\mu e_{ij} , \quad (3.13)$$

což je hledaný *zobecněný Hookeův zákon pro izotropní těleso*. Veličiny λ , μ se nazývají *Laméovy koeficienty* a udávají vlastnosti tělesa při deformaci.

Inverzní Hookeův zákon

Vyjádříme nyní tenzor deformace prostřednictvím složek tenzoru napětí. Podle (3.13) je

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij} \vartheta) , \quad (3.14)$$

potřebujeme však ještě určit vztah mezi invarianty ϑ a $\tau_{jj} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \theta$. Zapišeme (3.13) postupně pro diagonální složky tenzoru napětí a sečteme, takže obdržíme

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 3\lambda \vartheta + 2\mu(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \quad \text{neboli} \quad \theta = (3\lambda + 2\mu)\vartheta .$$

To znamená, že relaci

$$\vartheta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \theta .$$

můžeme použít v (3.14) s výsledkem

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \theta \right) , \quad (3.15)$$

který označujeme jako *inverzní Hookeův zákon*.

3.3.2 Elastické moduly

Laméovy (elastické) koeficienty nemají přímý fyzikální ani technický význam, proto se snažíme přeformulovat Hookeův zákon pomocí jiných veličin nazývaných elastické moduly, které lze snadno interpretovat.

Uvažujme nejprve (3.15) pouze pro složku τ_{11} za předpokladu, že zbývající dvě diagonální komponenty jsou nulové, tedy

$$e_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \tau_{11} \right) .$$

Odtud můžeme podle (3.6) vyjádřit Youngův modul pružnosti

$$E = \frac{\tau_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} . \quad (3.16)$$

Dále vyjádříme za stejných předpokladů složku e_{22} :

$$e_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \tau_{11} .$$

Jestliže $|e_{11}|$ představuje podélnou deformaci, pak $|e_{22}|$ vyjadřuje deformaci příčnou. Jejich podíl ν se nazývá *Poissonova konstanta* a lze pro ni za použití (3.16) odvodit vztah

$$\nu = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} . \quad (3.17)$$

Po nahrazení Laméových koeficientů λ , μ elastickými moduly E , ν dostáváme obě verze Hookeova zákona v následujícím tvaru:

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \delta_{ij} \right), \quad e_{ij} = \frac{1}{E} \left((1+\nu)\tau_{ij} - \nu\vartheta \delta_{ij} \right). \quad (3.18)$$

Příklady

- (a) Určíme invarianty při všesměrném tlaku (například hydrostatický tlak zevnějšku na stěny krychle). Tenzor napětí $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ je v tomto případě izotropní, a proto

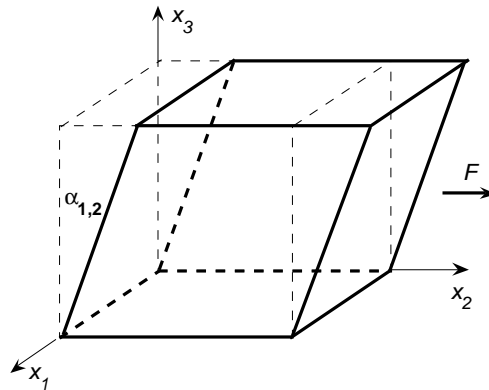
$$\theta = \tau_{ii} = -3p, \quad \vartheta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \theta = \frac{-3p}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{k} p.$$

Veličina $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ se nazývá *modul stlačitelnosti*.

- (b) Ukážeme vztah mezi napětím a smykovým úhlem při jednoduchém smyku. Uvažujme situaci podle obr. 3.5, kde pro smykový úhel platí $\alpha_{2,3} = 2e_{23}$. Ve vztahu pro napětí vyjádřené Hookeovým zákonem (3.13) je invariant $\vartheta = 0$, takže $\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$, tj. $\tau_{23} = 2\mu e_{23}$. Spojením posledních dvou vztahů dostáváme

$$\alpha_{2,3} = \frac{1}{\mu} \tau_{23} = \frac{1}{\mu} \frac{F}{S}.$$

Koeficient μ se často používá s označením G pod názvem *modul smyku*.



Obrázek 3.5: Jednoduchý smyk ve směru osy x_2 .

Cvičení

Odvoďte převodní vztahy mezi Laméovými koeficienty a elastickými moduly:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (3.19)$$

3.4 Rovnice mechaniky kontinua

3.4.1 Podmínky rovnováhy

Rovnováha sil

Zobecníme nyní bilanční vztah (1.23) pro libovolný elementární objem V s charakteristickým

rozměrem h . Rovnováha sil na tomto elementu pak znamená, že výslednice celkových objemových sil \mathbf{F} a plošných sil \mathbf{T} je nulová:

$$\int_V F_i dV + \int_{\partial V} T_i dS = 0 . \quad (3.20)$$

Za T_i dosadíme vyjádření pomocí tenzoru napětí:

$$\int_V F_i dV + \int_{\partial V} \tau_{ji} \nu_j dS = 0 . \quad (3.21)$$

Za předpokladu $\tau_{ji} \in C^1(V)$ aplikujeme na tuto rovnici Gaussovu–Ostrogradského větu a dostáváme jediný objemový integrál

$$\int_V \left(F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = 0 . \quad (3.22)$$

Po vydělení objemem $|V|$ a limitním přechodu pro $h \rightarrow 0$ získáme diferenciální tvar soustavy rovnic rovnováhy sil:

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + F_i = 0 . \quad (3.23)$$

Rovnováha momentů

Momentem síly \mathbf{F} rozumíme její vektorový součin s polohovým vektorem \mathbf{x} bodu X , v němž působí, tj. $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$. Budeme-li v základní rovnici rovnováhy (3.20) uvažovat místo sil jejich momenty, bude (pro jednotkovou normálu $\boldsymbol{\nu}$)

$$\int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{F})_i dV + \int_{\partial V} [\mathbf{x} \times \mathbf{T}(x, \boldsymbol{\nu})]_i dS = 0 . \quad (3.24)$$

Zapíšeme tento vztah za použití Levi–Civitova tenzoru,

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_{\partial V_h} \epsilon_{ijk} x_j \tau_{mk} \nu_m dS = 0 .$$

a použijeme Gaussovu–Ostrogradského větu:

$$\int_V \epsilon_{ijk} \left(x_j F_k + \frac{\partial (x_j \tau_{mk})}{\partial x_m} \right) dV = 0 .$$

Po derivování součinu ($\partial x_j / \partial x_m = \delta_{jm}$) můžeme integrál přepsat takto:

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j \left(F_k + \frac{\partial \tau_{mk}}{\partial x_m} \right) dV + \int_V \epsilon_{ijk} \delta_{jm} \tau_{mk} dV = 0 .$$

První člen je nulový vzhledem k (3.23), ve druhém provedeme úžení v indexu m ,

$$\int_V \epsilon_{ijk} \tau_{jk} dV = 0 ,$$

a následně limitní přechod pro $h \rightarrow 0$. Výsledkem je relace

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad \text{tj.} \quad \tau_{jk} = \tau_{kj} . \quad (3.25)$$

Z rovnováhy momentů tedy plyne symetrie tenzoru napětí. Tento důležitý výsledek je přímým důsledkem zákona akce a reakce.

3.4.2 Statické rovnice pružnosti

Popisujeme stav pružného tělesa Ω rovnicemi pro složky vektoru posuvů u_i za těchto předpokladů:

$$\lambda(x), \mu(x) \in C^1(\Omega), F_i \in C^1(\Omega), u_i \in C^2(\Omega).$$

Jako výchozí vztah použijeme podmínky rovnováhy (3.23), v nichž vyjádříme tenzor napětí pomocí Hookeova zákona (3.13) $\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + 2\mu e_{ij}$ a přejdeme pomocí (3.8) ke složkám vektoru posuvů:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_i = 0 \quad (3.26)$$

Tím jsme získali *obecné Laméovy rovnice pro posuvy*, které pro homogenní těleso ($\lambda, \mu = \text{const.}$) nabývají tvaru

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + F_i = 0. \quad (3.27)$$

Lze se s nimi setkat i ve známějším vektorovém vyjádření:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} = \mathbf{o}. \quad (3.28)$$

3.4.3 Dynamické rovnice

Budeme nyní navíc uvažovat posuvy jako funkce času $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{u} \in C^2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega \times \langle 0, T \rangle$. Statické rovnice doplníme o vliv setrvačných sil souvisejících s časovou změnou posuvů na základě *D'Alembertova principu*: za pohybu je těleso v rovnováze, doplníme-li statické síly silami setrvačnými.

Setrvačné síly $F_{i,s}$ vyjádříme podle 2. Newtonova zákona (na jednotku objemu), přičemž $a(x, t)$ je zrychlení a $\rho = \rho(x, t)$ je hustota:

$$F_{i,s} = -\rho a = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Dynamické rovnice rovnováhy pak podle (3.23) budou mít tvar

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (3.29)$$

Laméovy dynamické rovnice pro posuvy budou mít rovněž na pravé straně setrvačný člen,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.30)$$

resp. ve vektorovém tvaru

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.31)$$

Příklad

Ukážeme další tvar dynamických rovnic, který dovoluje analyzovat elastické vlny v tuhém tělese, speciálně například seismické procesy. Všimněme si nejprve rozměrové analýzy jednotlivých členů dynamické rovnice. Protože F_i je síla na jednotku objemu, platí $[F_i] = \text{Nm}^{-3}$, rozměr Laméových koeficientů je $[\lambda, \mu] = \text{Nm}^{-2}$. Vydělíme-li (3.31) hustotou ρ , můžeme zavést dvě nové veličiny

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

které mají rozměr rychlosti ms^{-1} . Upravená rovnice elastických vln má tvar

$$(c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_t^2 \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

kde c_l je podélná (longitudinální) rychlost a c_t příčná (transverzální) rychlost vlny.

Cvičení

Analogií Laméových rovnic pro posuvy jsou tzv. Beltramiho–Michellovy rovnice pro napětí, v nichž figurují elastické moduly. Odvoďte jejich nejpoužívanější speciální případ, který obdržíme pro $i = j$:

$$\Delta \theta + \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \text{div } \mathbf{F} = 0.$$

3.4.4 Okrajové podmínky v úlohách pružnosti

(A) Základní statické úlohy

Laméovy rovnice pro posuvy doplňujeme podmínkami na hranici Γ zadané oblasti. Hraniční podmínky zpravidla dělíme na **geometrické** (pro posuvy) a **statické** (pro napětí). Je-li $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(P)$ vektor normály v libovolném bodě hranice, označíme $\boldsymbol{\nu}_0$ jeho normovanou verzi.

(A1) Při zadání geometrických podmínek předepisujeme posuvy na hranici přímo vektorovou funkcí \mathbf{g} , jedná se tedy o podmínky Dirichletova typu:

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{g}(P) \quad \forall P \in \Gamma, \quad (3.32)$$

nebo složkově, $u_i = g_i$ na Γ . V některých případech mohou být zadány posuvy pouze v normálovém $\mathbf{u}^{(n)}$ či tečném směru $\mathbf{u}^{(t)}$, přičemž $\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u}^{(t)} = \mathbf{u}$. Předchozí podmínku lze pak snadno modifikovat, uvážíme-li, že je

$$u_j^{(n)} = u_i \nu_i \nu_{0,j}, \quad u_j^{(t)} = u_j - u_i \nu_i \nu_{0,j}. \quad (3.33)$$

(A2) Statickými podmínkami rozumíme situaci, kdy je na hranici zadán vektor napětí $\mathbf{T}_\Gamma(P)$:

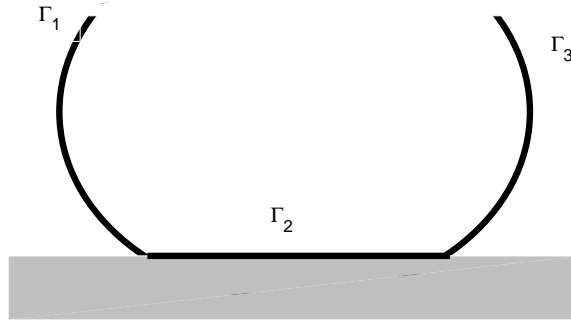
$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}_\Gamma(P) \quad \forall P \in \Gamma, \quad \text{tj.} \quad \tau_{ij}(P) \nu_j(P) = T_{\Gamma,i}(P). \quad (3.34)$$

Jelikož řešíme úlohu pro posuvy, je třeba tuto podmínku přepsat s použitím Hookeova zákona a vztahu mezi deformacemi a posuvy do odpovídající podoby:

$$\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \nu_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu_j = T_{\Gamma,i}. \quad (3.35)$$

Obdrželi jsme tak zobecněné Neumannovy hraniční podmínky. I v tomto případě může být zadání formulováno pouze pro tečný či normálový směr, přepis podmínek je analogický jako v případě (A1). Oba typy hraničních podmínek můžeme ilustrovat na smíšené okrajové úloze dle obr. 3.6. Hranice Γ_1, Γ_3 jsou "volné", tedy bez působení vnějších sil, můžeme na nich tudíž zadat homogenní okrajové podmínky Neumannova typu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{o}, \quad \text{tj.} \quad \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \nu_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \nu_j = 0. \quad (3.36)$$



Obrázek 3.6: Kontaktní hraniční podmínky.

Na hranici Γ_2 je předpokládán kontakt s podložkou, avšak bez tření. Tuto skutečnost můžeme vyjádřit dvěma způsoby. Jednak podmínka znamená nulové normálové posuvy,

$$u_i^{(n)} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

současně musí být nulová tečná napětí, nenastává-li tření:

$$T_i^{(t)} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2$$

s následným přepisem na relaci s posuvy.

(B) Počáteční podmínky

Zadávat je pro dynamické úlohy nejčastěji ve formě počátečních stavů posuvů,

$$u_i(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in \bar{\Omega} \quad (3.37)$$

a počátečních rychlostí posuvů,

$$\frac{\partial u_i(M, 0)}{\partial t} = \psi(M), \quad M \in \bar{\Omega}. \quad (3.38)$$

Funkce musí být dostatečně hladké, alespoň $\varphi, \psi \in C^1(\bar{\Omega})$.

3.4.5 Proudění nestlačitelných tekutin

Budeme hledat rovnice pro složky rychlostního pole $\mathbf{v} = v_i = dx_i/dt$ proudící nestlačitelné tekutiny. V takovém případě je $\rho = const.$, takže z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

plyne

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Nejprve vyjádříme zrychlení jako globální změnu rychlosti v čase totálním diferenciálem prvního řádu:

$$a_i(x, t) = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{(II)}, \quad (3.39)$$

kde (I) je konvektivní zrychlení a (II) časová změna rychlostního pole.

Jestliže vydělíme dynamickou rovnicí (3.29) hustotou ρ a na pravou stranu dosadíme za zrychlení z (3.39), obdržíme základní pohybovou rovnici nestlačitelných tekutin

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} F_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (3.40)$$

Tvar tenzoru τ_{ij} závisí na tom, zda uvažujeme vnitřní tření neboli viskozitu tekutiny. Pro úlohu bez vnitřního tření je napětí dáno pouze hydrostatickým tlakem, tj. $\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$. Obecná rovnice pak přejde v *Eulerovu rovnici*

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} F_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (3.41)$$

Budeme-li uvažovat úlohu s vnitřním třením, tedy proudění vazké tekutiny, musíme psát τ_{ij} v obecnější formě

$$\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Ukážeme, jak lze vyjádřit viskózní člen σ_{ij} . Nejprve rozložíme totální derivaci $\partial v_i / \partial x_j$ na součet symetrického a antisymetrického tenzoru:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \dot{e}_{ij},$$

kde jsme zanedbali druhý člen, který je velmi malý ve srovnání s prvním. Získaná veličina \dot{e}_{ij} se nazývá tenzor rychlosti deformace a s její pomocí vyjádříme σ_{ij} jako analogii Hookeova zákona:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \dot{e}_{kk} + 2\mu \dot{e}_{ij}.$$

Po dosazení do (3.40) dostáváme

$$\frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \frac{1}{\rho} F_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

V hranaté závorce je prostřední člen roven nule vzhledem k předpokladu nestlačitelnosti tekutiny, tentýž předpoklad vede ke zjednodušení třetího členu. Zavedeme-li dále kinematickou viskozitu ν vztahem

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

obdržíme jako výsledek *Navierovy–Stokesovy rovnice nestlačitelné tekutiny*:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} F_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (3.42)$$

3.5 Krystalové soustavy

Tenzorový aparát lze s výhodou použít ke klasifikaci krystalových soustav reprezentujících různou úroveň přirozené anizotropie minerálů. Upřednostníme optickou klasifikaci se třemi typy anizotropie 2. řádu (anaxiální, uniaxiální a biaxiální), které se v krystalografii dále specifikují; tenzor \mathbf{T} reprezentuje konkrétní anizotropii vzhledem k obvyklým osám kartézského souřadného systému:

1. anaxiální (kubická)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

2. uniaxiální (tetragonální, hexagonální, trigonální)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

3. biaxiální

- ortorombická

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

- monoklinická

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{31} & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

- triklinická

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Natočení krystalu (kolem počátku souřadného systému) se realizuje jako ortogonální transformace s nějakou maticí \mathbf{R} – viz kap. 1.2:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^\top \mathbf{T} \mathbf{R} ; \quad (3.43)$$

pozor, otáčíme krystal, nikoli souřadný systém.

Příklad

Proveďte optickou klasifikaci krystalu, který má v obecné poloze anizotropii popsanou tenzorem

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 9 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} .$$

Řešení.

Na úlohu lze nahlížet z několika hledisek. Můžeme ho například interpretovat jako nalezení kanonického tvaru kvadratické formy. Přidržíme se pojetí založeného na ortogonální transformaci, s jejíž pomocí otočíme krystal kolem počátku tak, aby souřadné osy splynuly s krystalovými. Půjde tedy o transformaci popsanou rovnicí (3.43). S tenzorem \mathbf{S} pracujeme stejně jako s maticí, a tedy prvním krokem je určení ortogonální matice, která tenzor transformuje do základní polohy. K tomu je třeba obvyklým způsobem vypočítat vlastní čísla vlastní vektory. Charakteristický polynom

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 11 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda - 8)^2(12 - \lambda)$$

položíme roven nule a získáme vlastní čísla $\lambda_1 = 12$ a $\lambda_{2,3} = 8$. Jim odpovídají vlastní vektory

$$\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{3}, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (-\sqrt{3}, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, 0).$$

Z jejich normovaných tvarů vytvoříme sloupce hledané matice transformace \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \left[\frac{\mathbf{u}_1^\top}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2^\top}{\|\mathbf{u}_2\|}, \frac{\mathbf{u}_3^\top}{\|\mathbf{u}_3\|} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato matice je ortogonální, protože $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$, jak bylo ukázáno v kapitole 1. Její struktura navíc napovídá, že půjde o otáčení kolem osy z neboli x_3 o úhel $\varphi = 60^\circ$, neboť jeho kosinus je $S_{11} = 1/2$.

Nyní můžeme přistoupit k transformaci původní matice:

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Výsledný diagonální tvar ukazuje, že se jedná o uniaxiální krystalový typ.

3.6 Umělá anizotropie v optice

Působení vnějších vlivů (mechanické namáhání, elektrické nebo magnetické pole aj.) na optický materiál může vyvolat anizotropii permitivity, případně permeability. Šíření optického svazku takovým prostředím se projevuje modulací vlastností incidentního elektromagnetického vlnění. K typickým příkladům patří fotoelasticita, piezoelektrický jev, elektrooptický nebo magnetooptický efekt.

3.6.1 Magnetooptický jev

Je známo, že u feromagnetických látek jako je železo, kobalt, nikl a dalších lze anizotropii indukovat uměle vnějším magnetickým polem. V důsledku toho dochází při interakci optické vlny s tímto prostředím k ovlivnění jejího polarizačního stavu. V odraženém poli hovoříme o Kerrově jevu, pro transmitovanou vlnu se jedná o Faradayův jev. Tyto efekty hrají významnou roli například u optických paměťových médií a v sensorice.

Budeme uvažovat lineární magnetooptický efekt v homogenním krystalu s kubickou symetrií, jehož permitivita je za neutrálního stavu reprezentována tenzorem

$$\varepsilon_{ij}^{[0]} = \delta_{ij} \varepsilon_0. \quad (3.44)$$

Vnější magnetické pole charakterizované vektorem magnetizace $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ indukuje anizotropii permitivity vyjádřenou tenzorem

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{M}) = \varepsilon^{[0]} + \varepsilon^{[1]}, \quad (3.45)$$

kde

$$\varepsilon_{ij}^{[1]} = i \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk} Q_k, \quad Q_k = Q \frac{M_k}{M_s}. \quad (3.46)$$

(veličina M_s označuje hodnotu saturované magnetizace). Výslednou formuli pro tenzor permitivity lze pak psát ve tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} Q_k . \quad (3.47)$$

Předpokládejme šíření dopadající světelné vlny v rovině $x = 0$ s kolmicí dopadu v ose z . Trojice 'rovina dopadu – rovina rozhraní – vektor magnetizace' jednoznačně určuje charakter magneto-optického efektu. V praxi jsou obvykle využívány tři základní typy magnetooptických konfigurací, které klasifikujeme podle následujícího klíče:

(a) *Polární konfigurace* ($\mathbf{M} = (0, 0, M_3)$, $Q_1 = Q_2 = 0$, $Q_3 = Q_P$):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & iQ_P & 0 \\ -iQ_P & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.48)$$

(b) *Longitudinální konfigurace* ($\mathbf{M} = (0, M_2, 0)$, $Q_1 = Q_3 = 0$, $Q_2 = Q_L$):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -iQ_L \\ 0 & 1 & 0 \\ iQ_L & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.49)$$

(c) *Transverzální konfigurace* ($\mathbf{M} = (M_1, 0, 0)$, $Q_2 = Q_3 = 0$, $Q_1 = Q_T$):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & iQ_T \\ 0 & -iQ_T & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.50)$$

Cvičení

V praxi je zpravidla $Q_P \approx Q_L \approx Q_T \approx Q$. Pak tenzor relativní permitivity feromagnetika při polární magnetooptické konfiguraci můžeme zapsat také ve tvaru

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & 0 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} , \quad (3.51)$$

kde $\varepsilon_1 = iQ\varepsilon_0$. Odvoďte jeho tvar při otočení vzorku o úhel α kolem osy x_2 . Ověřte, že pro $\alpha = \pi/2$ obdržíme transverzální konfiguraci.